

Devoir surveillé de mathématiques

Durée : 2 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Exercice 1 (4 points). — Pour tout nombre complexe z , on pose $P(z) = z^4 + 4z^3 + 3z^2 - 2z - 6$.

1.
 - a. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z^2 + 2z - 3)(z^2 + 2z + 2)$.
 - b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ d'inconnue z .
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm). On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = 1, \quad z_B = -3, \quad z_C = -1 + i \quad \text{et} \quad z_D = -1 - i.$$

- a. Faire une figure et placer les points A, B, C et D.
- b. Montrer, par un raisonnement qui fera intervenir des calculs d'affixes, que le quadrilatère ACBD est un parallélogramme.

Exercice 2 (4 points). — Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE. Justifier la réponse avec précision. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. La partie réelle de $(1 + i)^4$ est 1.
2. Si un complexe z vérifie $z + i\bar{z} = 0$ alors $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0$.
3. Pour tout complexe z , $z^{2019} - \bar{z}^{2019}$ est un imaginaire pur.
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$ est un cercle de rayon 1.

Exercice 3 (5 points). — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n - 0,3u_n^2.$$

1. On définit la fonction f sur $[0; 1]$ par $f(x) = x - 0,3x^2$. Étudier les variations de f sur $[0; 1]$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
3. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4.
 - a. Soit $\alpha > 0$. Justifier qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n < \alpha$.
 - b. On prend $\alpha = 0,1$. Déterminer la plus petite valeur possible de n_0 .

Exercice 4 (7 points)

Dans tout cet exercice, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}.$$

Partie A

1. Calculer u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles. On donnera le détail des calculs.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	Algorithme 2
$U \leftarrow \frac{1}{3}$ Pour i allant de 0 à n $U \leftarrow \frac{3U}{1+2U}$ Fin Pour	$U \leftarrow \frac{1}{3}$ Pour i allant de 0 à $n - 1$ $U \leftarrow \frac{3U}{1+2U}$ Fin Pour

De ces deux algorithmes, lequel permet d'obtenir la valeur de u_n dans la variable U à la fin de l'exécution ? On expliquera brièvement son choix.

4. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau suivant dans lequel les valeurs ont été arrondies à 10^{-3} près.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	0,333	0,6	0,818	0,931	0,976	0,992	0,997	0,999

Quelle conjecture peut-on faire quant à une éventuelle limite de la suite (u_n) ?

Partie B

Dans toute cette partie, on admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

1. On considère la suite (w_n) définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{1}{u_n} - 1.$$

Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

2. **a.** Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression explicite de w_n en fonction de n .
b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de w_n et en déduire que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{1 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}.$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .