

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques du 09/11/19

Exercice 1

1. a. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\begin{aligned}(z^2 + 2z - 3)(z^2 + 2z + 2) &= z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z^3 + 4z^2 + 4z - 3z^2 - 6z - 6 \\ &= z^4 + 4z^3 + 3z^2 - 2z - 6 \\ &= P(z).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, P(z) = (z^2 + 2z - 3)(z^2 + 2z + 2)}$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout nombre complexe z , $P(z) = 0$ si et seulement si $z^2 + 2z - 3 = 0$ ou $z^2 + 2z + 2 = 0$.

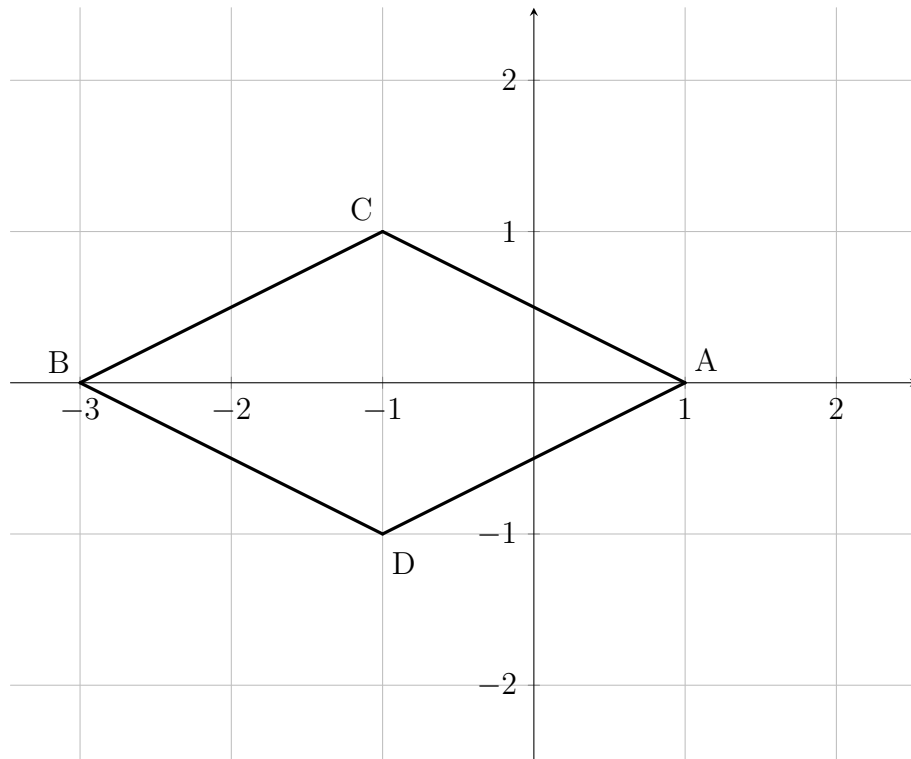
On est donc ramené à résoudre deux équations du second degré à coefficients réels.

Le discriminant de $z^2 + 2z - 3$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$ donc l'équation $z^2 + 2z - 3 = 0$ possède deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2-4}{2} = -3$ et $z_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2+4}{2} = 1$.

Le discriminant de $z^2 + 2z + 2$ est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$ donc l'équation $z^2 + 2z + 2 = 0$ possède deux solutions complexes conjuguées : $z_3 = \frac{-2-i\sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-2-2i}{2} = -1 - i$ et $z_4 = \bar{z}_3 = -1 + i$.

On conclut donc que l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ est $\{-3; 1; -1 - i; -1 + i\}$.

2. a.



b. Puisque $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -1 + i - 1 = -2 + i$ et $z_{\overrightarrow{DB}} = z_B - z_D = -3 - (-1 - i) = -2 + i$, on a $z_{\overrightarrow{AC}} = z_{\overrightarrow{DB}}$. Dès lors, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ et donc $\boxed{\text{ACBD est un parallélogramme}}$.

Exercice 2

1. L'affirmation est FAUSSE.

On remarque que $(1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$ donc $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$. En particulier, la partie réelle de $(1+i)^4$ est -4 .

2. L'affirmation est VRAIE.

Soit z un complexe tel que $z + i\bar{z} = 0$. Écrivons z sous forme algébrique $z = a + ib$. Alors,

$$z + i\bar{z} = a + ib + i(a - ib) = a + ib + ia - i^2b = a + ib + ia + b = (1+i)(a+b)$$

donc, puisque $z + i\bar{z} = 0$ alors $(1+i)(a+b) = 0$ et, comme $1+i \neq 0$, $a+b = 0$. Autrement dit, $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0$.

3. L'affirmation est VRAIE.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, $z^{2019} - \bar{z}^{2019} = z^{2019} - \overline{z^{2019}} = 2i \operatorname{Im}(z^{2019})$ est un imaginaire pur.

4. L'affirmation est VRAIE.

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$. Soit M un point du plan d'affixe z . Écrivons z sous forme algébrique : $z = x + iy$. Alors

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-0)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-(-1))^2 + (y-0)^2 = 1^2$$

Ainsi, $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et rayon $R = 1$.

Exercice 3

1. La fonction f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $[0; 1]$ et, pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) = 1 - 0,6x$. Or, pour tout $x \in [0; 1]$, $x \leq 1$ donc $-0,6x \geq -0,6$ et ainsi $f'(x) \geq 1 - 0,6 = 0,4$. Ainsi, pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0; 1]$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ ».

Comme $u_0 = 1$, $u_1 = 1 - 0,3 \times 1^2 = 0,7$ donc $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

Alors, $0 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 1$ donc, comme f est croissante sur $[0; 1]$,

$$f(0) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(1).$$

Or, $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,7$ donc $0 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 0,7$ et donc $0 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence que, $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

3. D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante est minorée par 0 donc, d'après le théorème des suites monotones, (u_n) converge vers une limite $\ell \geq 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ donc, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3u_n^2 = 0,3\ell^2$ et, par différence,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 0,3u_n^2 = \ell - 0,3\ell^2$$

i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell - 0,3\ell^2$. Mais, par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ donc, par unicité de la limite de (u_{n+1}) , $\ell = \ell - 3\ell^2$ donc $-3\ell^2 = 0$ i.e. $\ell = 0$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. a. On vient de montrer que (u_n) tend vers 0 donc, par définition, tout intervalle ouvert contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Ainsi, il existe un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \in]-\alpha; \alpha[$. En particulier, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n < \alpha$.

- b. À l'aide d'un tableau de valeurs obtenu sur la calculatrice, on trouve que la plus petite valeur de n_0 lorsque $\alpha = 0,1$ est 28.

Exercice 4

Partie A

1. Par définition, $u_1 = \frac{3u_0}{1+2u_0} = \frac{3 \times \frac{1}{3}}{1+2 \times \frac{1}{3}}$ i.e. $\boxed{u_1 = \frac{3}{5}}$ et $u_2 = \frac{3u_1}{1+2u_1} = \frac{3 \times \frac{3}{5}}{1+2 \times \frac{3}{5}}$ i.e. $\boxed{u_2 = \frac{9}{11}}$.
2. Comme $u_1 - u_0 = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15} \neq \frac{12}{55} = \frac{9}{11} - \frac{3}{5} = u_2 - u_1$, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.
De même, $\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{5} \neq \frac{15}{11} = \frac{\frac{9}{11}}{\frac{3}{5}} = \frac{u_2}{u_1}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$.
3. Le bon algorithme est l'algorithme n°2. En effet, l'algorithme doit calculer successivement $u_1, u_2, \dots, u_n$. Or, dans la formule de récurrence $u_{i+1} = \frac{3u_i}{1+2u_i}$, on obtient u_1 en prenant $i = 0$, u_2 en prenant $i = 1$, ..., u_n en prenant $i = n - 1$.
4. On peut conjecturer que (u_n) converge vers (une valeur proche de) 1.

Partie B

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$w_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{1 + 2u_n}{3u_n} - 1 = \frac{1 + 2u_n - 3u_n}{3u_n} = \frac{1 - u_n}{3u_n} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - u_n}{u_n} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$$

i.e. $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n$.

Ainsi, $\boxed{(w_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{3}}$.

2. a. Comme (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Or, $w_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = 3 - 1 = 2$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, w_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$.
b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{1}{u_n} - 1$ donc $w_n + 1 = \frac{1}{u_n}$ et ainsi $u_n = \frac{1}{w_n + 1}$. On conclut donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \frac{1}{1+2\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$
3. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. Dès lors, par produit et somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$ et ainsi, par quotient, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$.