

Devoir surveillé de mathématiques

Enseignement de spécialité

Durée : 4 heures

L'utilisation d'UNE ET D'UNE SEULE calculatrice est autorisée.
Tout document est interdit.

Exercice 1 (4 points). — Une fabrique artisanale de poupées vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque poupée produite par l'entreprise est soumise à deux contrôles : d'une part, l'aspect de la poupée est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition et, d'autre part, sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 90 % des poupées sont sans défaut de finition ;
- parmi les poupées qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des poupées ont un défaut de finition et un défaut de solidité.

On prend au hasard une poupée parmi les poupées produites. On note :

- F l'événement : « la poupée est sans défaut de finition » ;
- S l'événement : « la poupée réussit le test de solidité ».

- En utilisant les données de l'énoncé, donner les probabilités suivantes : $P(F)$, $P(\overline{F} \cap \overline{S})$ et $P_F(S)$.
 - Démontrer que $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = \frac{1}{5}$.
 - Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
- Démontrer que $P(S) = 0,935$.
 - Une poupée a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'elle soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième)
 - Les événements F et S sont-ils indépendants ?
- On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 poupées. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de poupées de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.
 - Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Justifier.
 - Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité. (On donnera le résultat arrondi au millième)

Exercice 2 (4 points)

Partie A. — Soit la fonction u définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par

$$u(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3.$$

1. Déterminer la limite de la fonction u en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de u sur $]1; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
3. Démontrer qu'il existe un unique réel c de $]1; +\infty[$ tel que $u(c) = 0$ puis en donner une valeur approchée à 0,1 près.

Partie B. — Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 5}{x - 1}.$$

On nomme $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan et Δ la droite d'équation $y = x$.

On admet que f est dérivable sur $]1; +\infty[$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]1; +\infty[$.
2. Soit a un réel strictement supérieur à 1.
Justifier que la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est parallèle à la droite Δ si et seulement si $f'(a) = 1$.
3. **a.** Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par

$$g(x) = f'(x) - 1.$$

Vérifier que, pour tout réel x de $]1; +\infty[$,

$$g(x) = \frac{2u(x)}{(x-1)^2}$$

u étant la fonction définie dans la **Partie A**.

- b.** En déduire l'existence d'une unique tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à la droite Δ .

Exercice 3 (3 points)

1. Déterminer les limites qui suivent ainsi que les éventuelles asymptotes parallèles aux axes qui s'en déduisent.

a. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 2}.$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{5x+1}{x^4+3}}.$

2. On considère la fonction f définie du $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x$.

a. Démontrer que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x}.$

- b.** En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 4 (5 points)

À TRAITER SUR UNE COPIE SÉPARÉE

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 0,3u_n + 0,5v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = -0,5u_n + 1,3v_n.$$

Partie A

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Reproduire et compléter l'algorithme ci-dessous de telle sorte qu'à la fin de l'exécution, les variables U et V contiennent respectivement les valeurs de u_n et v_n .

```
U ← 1
V ← 2
Pour K allant de ...
    W ← U
    U ← ...
    V ← ...
Fin Pour
```

2. Quel est le rôle de la variable W ?

Partie B. — On note, pour tout entier naturel n , $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. a. Donner X_0 .
b. Calculer u_1 et v_1 et en déduire X_1 .
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix}$.
Vérifier que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n$.
On admet, dans toute la suite, que, pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .
 - b. Déterminer la matrice $T = P^{-1}AP$.
 - c. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}.$$

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $A^n = PT^nP^{-1}$.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 0,8^n + 0,5n \times 0,8^{n-1} \quad \text{et} \quad v_n = 2 \times 0,8^n + 0,5n \times 0,8^{n-1}$$

5. a. On rappelle l'inégalité de Bernoulli démontrée en cours :
pour tout réel $x > -1$ et tout entier naturel k , $(1+x)^k \geq 1+kx$.
Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $5 \times 1,1^{n-1} \geq 0,5n$.
b. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 5 (4 points)

Soit a un nombre complexe distinct de i et $-i$.

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation (E) suivante, d'inconnue complexe z :

$$(E) : (a^2 + 1)z^2 + az + 1 = 0.$$

1. Un premier exemple

On suppose que $a = 1$. L'équation (E) s'écrit donc :

$$2z^2 + z + 1 = 0.$$

Résoudre cette équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2. Un second exemple

On suppose dans cette question que $a = 1 + 2i$.

- a. Écrire alors l'équation (E) et vérifier que le nombre $-\frac{1}{2}$ est solution de (E) .
- b. Montrer que, pour tout nombre complexe z ,

$$(-2 + 4i)z^2 + (1 + 2i)z + 1 = (2z + 1)[(-1 + 2i)z + 1].$$

- c. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$. On donnera les solutions sous forme algébrique.
 - d. Existe-t-il une autre valeur de a pour laquelle $-\frac{1}{2}$ est solution de (E) ? Si oui, préciser laquelle.
3. On suppose à présent que a est un imaginaire pur et on pose donc $a = ib$ où b est un réel distinct de -1 et 1 . On cherche à savoir pour quelles valeurs de b l'équation (E) admet deux solutions imaginaires pures.
- a. Soit y un réel. On pose $z = iy$. Montrer que z est solution de (E) si et seulement si y est solution de l'équation :

$$(E') : (b^2 - 1)y^2 - by + 1 = 0.$$

- b. En déduire que (E) admet deux solutions imaginaires pures distinctes si et seulement si b appartient à l'intervalle $\left] -\frac{2}{\sqrt{3}} ; \frac{2}{\sqrt{3}} \right[$.