

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques du 07/12/19

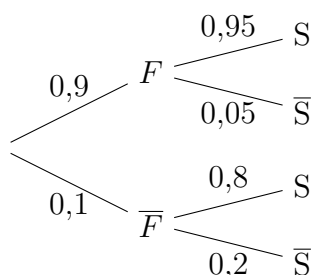
Exercice 1

1. a. D'après l'énoncé, $P(F) = 0,9$, $P(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0,02$ et $P_F(S) = 0,95$.
b. Par définition,

$$P_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{P(\bar{F} \cap \bar{S})}{P(\bar{F})} = \frac{P(\bar{F} \cap \bar{S})}{1 - P(F)} = \frac{0,02}{1 - 0,9} = \frac{0,02}{0,1}$$

i.e. $\boxed{P_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{1}{5}}.$

c.



2. a. Comme les événements F et $\bar{F}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(F) \times P_F(S) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(S) = 0,9 \times 0,95 + 0,1 \times 0,8$$

i.e. $\boxed{P(S) = 0,935}.$

- b. La probabilité qu'une poupée soit sans défaut de finition sachant qu'elle a réussi le test de solidité est

$$P_S(F) = \frac{P(S \cap F)}{P(S)} = \frac{P(F) \times P_F(S)}{P(S)} = \frac{0,9 \times 0,95}{0,935} = \frac{171}{187}$$

i.e. $\boxed{P_S(F) \approx 0,914}.$

- c. Puisque $P_S(F) \neq P(F)$, les événements $\boxed{F \text{ et } S \text{ ne sont pas indépendants}}.$

3. a. Prélever au hasard une poupée constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,935$ en prenant comme succès S .

Prélever 10 poupées au hasard en assimilant ces prélèvements à des tirages avec remise revient à répéter 10 fois cette épreuve de Bernoulli de façon identique et indépendante : cela constitue un schéma de Bernoulli de paramètre $p = 0,935$ et $n = 10$.

La variable aléatoire X qui compte alors le nombre de succès suit une loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,935)$.

- b. La probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité est

$$P(X \geq 8) = 1 - P(\bar{X} \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$$

soit $\boxed{P(X \geq 8) \approx 0,977}.$

Exercice 2

Partie A

1. Comme u est une fonction polynôme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.
2. La fonction u est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[1; +\infty[$ et, pour tout réel $x \geq 1$, $u'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Le discriminant du trinôme $3x^2 - 4x + 1$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \times 3} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \times 3} = 1.$$

Comme le coefficient dominant $a = 3$ est positif, on en déduit que $u'(x) > 0$ si $x \in]1; +\infty[$ et $u(1) = 0$.

On conclut donc que u est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	1	$+\infty$
variations de u	-3	$+\infty$

3. La fonction u est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1; +\infty[$. De plus, $0 \in \left[u(1); \lim_{+\infty} u \right[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $c \in [1; +\infty[$ tel que $u(c) = 0$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve $c \approx 2,2$.

Partie B

1. Pour tout réel $x > 1$,

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - (x^3+5) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3 - 5}{(x-1)^2}$$

$$\text{soit } f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 5}{(x-1)^2}.$$

2. Le coefficient directeur de T_a est $f'(a)$ et celui de Δ est 1. On en déduit que T_a est parallèle à la droite Δ si et seulement si $f'(a) = 1$.
3. a. Soit $x \in]1; +\infty[$. Alors,

$$\begin{aligned} f'(x) - 1 &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 5}{(x-1)^2} - 1 = \frac{2x^3 - 3x^2 - 5 - (x-1)^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 5 - (x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 5 - x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 6}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

soit finalement, $\boxed{g(x) = \frac{2u(x)}{(x-1)^2}}.$

- b. Soit un réel $a > 1$. On sait que T_a est parallèle à Δ si et seulement si $f'(a) = 1$ ce qui équivaut à $g'(a) = 0$ i.e. $\frac{2u(a)}{(a-1)^2} = 0$. Il s'ensuit que T_a est parallèle à Δ si et seulement si $u(a) = 0$. On déduit alors de la **Partie A** que T_a est parallèle à Δ si et seulement si $a = c$.

Ainsi, il existe une unique tangente à la courbe de f parallèle à Δ : il s'agit de la tangente T_c au point d'abscisse c .

Exercice 3

1. a. Par continuité (ou par opérations sur les limites), $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4x + 1 = 2^2 - 4 \times 2 + 1 = -3$.

De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x - 2 = 0^-$ donc, par quotient, $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 2} = +\infty}.$

On en déduit que la courbe d'équation $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 2}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

- b. Comme $x \mapsto \frac{5x + 1}{x^4 + 3}$ est une fonction rationnelle,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 1}{x^4 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^3} = 0.$$

De plus, par continuité, $\lim_{X \rightarrow 0} \sqrt{X} = \sqrt{0} = 0$ donc, par composition, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{5x + 1}{x^4 + 3}} = 0}.$

On en déduit que la courbe d'équation $y = \sqrt{\frac{5x + 1}{x^4 + 3}}$ possède une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (i.e. l'axe des abscisses) au voisinage de $+\infty$.

2. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, en utilisant la quantité conjuguée,

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 4} + x)(\sqrt{x^2 + 4} - x)}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{\sqrt{x^2 + 4}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + x}$$

donc $\boxed{f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x}}.$

- b. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 4 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4} = +\infty$. Par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4} + x = +\infty$ et donc, par quotient, $\boxed{\lim_{+\infty} f = 0}.$

Exercice 4 (spécifique)

Partie A

- 1.

	initialisation	étape 1	étape 2	étape 3
K		0	1	2
U	5	7	11,5	21

2. À la fin de l'exécution de l'algorithme, la variable U vaut 21.

Partie B

1. On peut modifier l'algorithme de la façon suivante :

```

 $U \leftarrow 5$ 
Pour  $K$  variant de 0 à  $P - 1$ 
     $U \leftarrow 0,5U + 0,5K - 1,5$ 
Fin de pour
    
```

2. Étant donné que $u_3 < u_4$, on ne peut pas affirmer que la suite (u_n) est décroissante.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « $u_{n+1} > u_n$ ».

Comme $u_4 > u_3$, la proposition P_3 est vraie.

Soit k un entier au moins égal à 3.

Supposons que P_k est vraie. Alors, $u_{k+1} > u_k$ donc, comme $k+1 > k$, $u_{k+1} + (k+1) > u_k + k$.

En multipliant par $0,5 > 0$, il vient $0,5u_{k+1} + 0,5(k+1) > 0,5u_k + 0,5k$ et donc $0,5u_{k+1} + 0,5(k+1) - 1,5 > 0,5u_k + 0,5k - 1,5$ i.e. $u_{k+2} > u_{k+1}$. Ainsi, la propriété P_{k+1} est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, $\text{pour tout entier } n \geq 3, u_{n+1} > u_n$.

On en déduit que (u_n) est croissante à partir du rang 3.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= 0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5 \\
 &= 0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n - 0,1 + 0,5 \\
 &= 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n + 0,4 \\
 &= 0,05u_n - 0,05n + 0,25 \\
 &= 0,5(0,1u_n - 0,1n + 0,5) \\
 &= 0,5v_n
 \end{aligned}$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5.

- b. Comme $v_0 = 0,1u_0 + 0,5 = 1$, on en déduit que, $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = 0,5^n$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{0,1}(v_n + 0,1n - 0,5) = 10(v_n + 0,1n - 0,5) = 10v_n + n - 5$ donc, $\text{tout entier naturel } n, u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$.

6. Puisque $-1 < 0,5 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 5 = +\infty$ donc, par produit et somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4 (spécialité)

Partie A

- 1.

```

 $U \leftarrow 1$ 
 $V \leftarrow 2$ 
Pour  $K$  allant de 0 de  $n - 1$ 
     $W \leftarrow U$ 
     $U \leftarrow 0,3W + 0,5V$ 
     $V \leftarrow -0,5W + 1,3V$ 
Fin Pour
    
```

2. La variable W sert à « stocker » la valeur de U à l'entrée de la boucle Pour afin de pouvoir calculer la variable V . En effet, la valeur de la variable U est modifiée lors de l'affectation $U \leftarrow 0,3W + 0,5V$ alors que le calcul de V doit utiliser la valeur de U à l'entrée de la boucle Pour.

Partie B

1. a. Par définition, $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ i.e. $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- b. Par définition, $u_1 = 0,3u_0 + 0,5v_0 = 0,3 \times 1 + 0,5 \times 2$ soit $u_1 = 1,3$ et $v_1 = -0,5u_0 + 1,3v_0 = -0,5 \times 1 + 1,3 \times 2$ soit $v_1 = 3,1$.

Ainsi, $X_1 = \begin{pmatrix} 1,3 \\ 3,1 \end{pmatrix}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3u_n + 0,5v_n \\ -0,5u_n + 1,3v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Ainsi, on a bien, $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.

3. a. Comme $\det P = 1 \times 1 - 1 \times 0 = 1 \neq 0$, la matrice P est inversible. De plus, à l'aide de la calculatrice, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. À l'aide de la calculatrice, $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$.

- c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P_n : \langle T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix} \rangle$.

Comme $\begin{pmatrix} 0,8^0 & 0,5 \times 0 \times 0,8^{-1} \\ 0 & 0,8^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ et $T^0 = I_2$, la proposition P_0 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie.

Alors,

$$\begin{aligned} T^{k+1} &= T^k \times T = \begin{pmatrix} 0,8^k & 0,5k \times 0,8^{k-1} \\ 0 & 0,8^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8^k \times 0,8 + 0 & 0,8^k \times 0,5 + 0,5k \times 0,8^{k-1} \times 0,8 \\ 0 + 0 & 0 + 0,8^k \times 0,8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8^{k+1} & 0,5 \times 0,8^k + 0,5k \times 0,8^k \\ 0 & 0,8^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8^{k+1} & 0,5(k+1) \times 0,8^k \\ 0 & 0,8^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, P_{k+1} est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, P_n \text{ est vraie}$.

4. a. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $H_n : \langle A^n = PT^nP^{-1} \rangle$.
Comme $A^0 = I_2$ et $PT^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$, H_0 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que H_k est vraie. Alors,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \times A = (PT^k P^{-1})(PT P^{-1}) \\ &= PT^k (PP^{-1})TP^{-1} = PT^k I_2 TP^{-1} \\ &= PT^k TP^{-1} = PT^{k+1} P^{-1} \end{aligned}$$

donc H_{k+1} est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, A^n = PT^n P^{-1}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'énoncé, $X_n = A^n X_0 = PT^n P^{-1} X_0$ donc

$$\begin{aligned} X_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8^n + 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0,8^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8^n + 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0,8^n + 0,5n \times 0,8^{n-1} + 0,8^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8^n + 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 2 \times 0,8^n + 0,5n \times 0,8^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or, par définition, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ donc on conclut que,

$$\boxed{u_n = 0,8^n + 0,5n \times 0,8^{n-1} \quad \text{et} \quad v_n = 2 \times 0,8^n + 0,5n \times 0,8^{n-1}}$$

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons l'inégalité de Bernoulli avec $x = 0,1$ et $k = n - 1$. Il vient :

$$1,1^{n-1} = (1 + 0,1)^{n-1} \geq 1 + (n-1) \times 0,1 = 1 + 0,1n - 0,1 = 0,1n + 0,9$$

Il s'ensuit que $1,1^{n-1} \geq 0,1n$ et, en multipliant par 5, on obtient $\boxed{5 \times 1,1^{n-1} \geq 0,5n}$.

b. Comme $-1 < 0,8 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$. De plus, d'après la question précédente, pour tout $n \geq 1$, $1,1^{n-1} \geq 0,5n$ donc, en multipliant par $0,8^{n-1}$ qui est positif, on obtient

$$0 \leq 0,5n \times 0,8^{n-1} \leq 1,1^{n-1} \times 0,8^{n-1} = 0,88^{n-1}.$$

Mais, comme $-1 < 0,88 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,88^n = 0$ et donc, grâce au théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5n \times 0,8^{n-1} = 0$. Par somme, on conclut que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0}$.

Exercice 5

1. Le discriminant de (E) est $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$ donc (E) possède deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2 \times 2} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ dans } \mathbb{C} \text{ est } \left\{ -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i; -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i \right\}}$.

- 2. a.** L'équation (E) s'écrit $((1 + 2i)^2 + 1)z^2 + (1 + 2i)z + 1 = 0$. Or,

$$(1 + 2i)^2 + 1 = 1 + 4i - 4 + 1 = -2 + 4i$$

donc (E) s'écrit $(-2 + 4i)z^2 + (1 + 2i)z + 1 = 0$.

De plus,

$$\begin{aligned} (-2 + 4i) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (1 + 2i) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 &= (-2 + 4i) \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - i + 1 \\ &= -\frac{1}{2} + i + \frac{1}{2} - i \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $-\frac{1}{2}$ est solution de (E) .

- b.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\begin{aligned} (2z + 1)[(-1 + 2i)z + 1] &= 2z \times (-1 + 2i)z + 2z + (-1 + 2i)z + 1 \\ &= 2 \times (-1 + 2i) \times z^2 + 2z + (-1 + 2i)z + 1 \\ &= (-2 + 4i)z^2 + (2 - 1 + 2i)z + 1 \end{aligned}$$

i.e. $(2z + 1)[(-1 + 2i)z + 1] = (-2 + 4i)z^2 + (1 + 2i)z + 1$.

- c.** Grâce à la question précédente, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow (2z + 1)[(-1 + 2i)z + 1] = 0 \\ &\Leftrightarrow 2z + 1 = 0 \text{ ou } (-1 + 2i)z + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \text{ ou } z = -\frac{1}{-1 + 2i} \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \text{ ou } z = -\frac{-1 - 2i}{1^2 + 2^2} \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \text{ ou } z = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de (E) est $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right\}$.

- d.** Le réel $-\frac{1}{2}$ est solution de (E) si et seulement si $(a^2 + 1)(-\frac{1}{2})^2 + a(-\frac{1}{2}) + 1 = 0$ i.e. $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}a + 1 = 0$ soit encore $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{5}{4} = 0$. Ainsi, $-\frac{1}{2}$ est solution de (E) si et seulement si a est solution de l'équation $(F) : \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{5}{4} = 0$. Or, (F) est une équation du second degré à coefficients réels et on sait d'après la question **b.** que $a = 1 + 2i$ est solution (F) . On en déduit que $\overline{1 + 2i}$ est l'autre solution de (F) dans $\mathbb{C}$.

Ainsi, il existe une (et une seule) autre valeur de a telle que $-\frac{1}{2}$ soit solution de (E) : il s'agit de $1 - 2i$.

Remarque. — On pouvait également trouver cette autre valeur en résolvant l'équation (F) à l'aide du calcul du discriminant.

- 3. a.** Le complexe $z = iy$ est solution de (E) si et seulement si $((ib)^2 + 1)(iy)^2 + (ib)(iy) + 1 = 0$ i.e. $(-b^2 + 1)(-y^2) - by + 1 = 0$ soit encore $(b^2 - 1)y^2 - by + 1 = 0$. Ainsi, on a bien : $z = iy$ est solution de (E) si et seulement si y est solution de l'équation (E') .

- b.** Ainsi, (E) admet deux solutions imaginaires pures distinctes (disons iy et iy') si et seulement si l'équation (E') admet deux solutions réelles distinctes (à savoir y et y').

Or, (E') admet deux solutions réelles distinctes si et seulement si son discriminant Δ' est strictement positif. Mais,

$$\Delta' = (-b)^2 - 4 \times (b^2 - 1) \times 1 = b^2 - 4b^2 + 4 = 4 - 3b^2$$

donc

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - 3b^2 > 0 \Leftrightarrow 4 > 3b^2 \Leftrightarrow b^2 < \frac{4}{3} \Leftrightarrow |b| < \sqrt{\frac{4}{3}}$$

Or $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ donc $\Delta' > 0$ si et seulement si $|b| < \frac{2}{\sqrt{3}}$ i.e. $-\frac{2}{\sqrt{3}} < b < \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ainsi, on conclut que (E) admet deux solutions imaginaires pures distinctes si et seulement si b appartient à l'intervalle $\left] -\frac{2}{\sqrt{3}} ; \frac{2}{\sqrt{3}} \right[$.