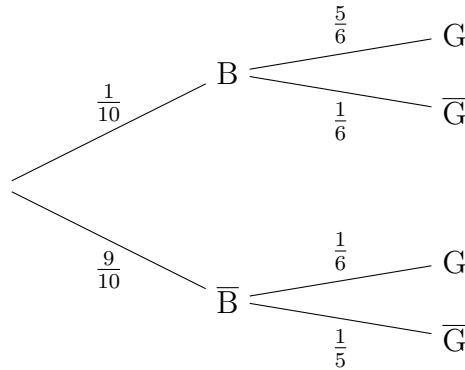


Corrigé du devoir surveillé n°3

Exercice 1.

1. On peut représenter la situation par l'arbre pondéré suivant :



2. Les événements B et \bar{B} forment une partition de l'univers donc, par la formule des probabilités totales,

$$P(G) = P(B)P_B(G) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(G) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6}$$

i.e. $P(G) = \frac{7}{30}$.

3. La probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu est

$$P_{\bar{G}}(B) = \frac{P(\bar{G} \cap B)}{P(\bar{G})} = \frac{P(B)P_B(\bar{G})}{1 - P(G)} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{1 - \frac{7}{30}}$$

i.e. $P_{\bar{G}}(B) = \frac{1}{46}$.

4. a. Jouer une partie constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{7}{30}$ en prenant comme succès S : « le joueur gagne la partie ».

Jouer quatre parties de façon indépendante revient à répéter quatre fois cette épreuve de façon identique et indépendante : cela constitue un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(4, \frac{7}{30})$.

b. La probabilité que la joueur gagne exactement deux parties sur les quatre est

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{7}{30}\right)^2 \left(\frac{23}{30}\right)^2 = \frac{25921}{135000} \approx 0,192.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que le joueur joue n fois et notons A_n : « le joueur gagne au moins une partie sur les n ». Alors, \bar{A}_n : « le joueur perd les n parties » donc $P(\bar{A}_n) = \left(\frac{23}{30}\right)^n$ donc $P(A_n) = 1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n$. On cherche donc n tel que $1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n \geq 0,999$. Or,

$$1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n \geq 0,999 \Leftrightarrow \left(\frac{23}{30}\right)^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{23}{30}\right) \leq \ln(0,001) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{23}{30}\right)} \approx 25,998$$

Comme n est entier, on conclut que le nombre minimal de parties qu'un joueur doit faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,999 est 26.

Exercice 2.

1. On a $\overrightarrow{AB} (1; -2; -5)$ et $\overrightarrow{AC} (2; -1; -4)$ donc $x_{\overrightarrow{AB}}y_{\overrightarrow{AC}} = -1 \neq -4 = x_{\overrightarrow{AC}}y_{\overrightarrow{AB}}$ donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires et on conclut que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + (-2) \times (-2) + 1 \times (-5) = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 2 + (-2) \times (-1) + 1 \times (-4) = 0$ donc \vec{n} est normal à \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . Comme \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} forment une base du plan (ABC), on conclut que \vec{n} est normal au plan (ABC).
3. Pour tout point $M(x; y; z)$ de l'espace,

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in (ABC) &\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \times (x - 1) + (-2) \times (y - 2) + 1 \times (z - 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2y + z - 4 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne du plan (ABC) est $x - 2y + z - 4 = 0$.

4. a. Comme $x_D - 2y_D + z_D - 4 = 3 - 2 \times (-6) + 1 - 4 = 12 \neq 0$, le point D n'appartient pas au plan (ABC).
b. Comme Δ est perpendiculaire à (ABC), elle est dirigé par \vec{n} . Comme, de plus, Δ passe par D, on conclut qu'une représentation paramétrique de Δ est

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -6 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

- c. Le point H est le point d'intersection de Δ et de (ABC). Pour trouver ses coordonnées, on résout le système suivant :

$$\begin{aligned} (S) \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -6 - 2t \\ z = 1 + t \\ x - 2y + z - 4 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -6 - 2t \\ z = 1 + t \\ 3 + t - 2(-6 - 2t) + 1 + t - 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -6 - 2t \\ z = 1 + t \\ 6t + 12 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -1 \\ t = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées de H sont $(1; -2; -1)$.

- d. On conclut que la distance de D au plan (ABC) est

$$DH = \sqrt{(1 - 3)^2 + (-2 - (-6))^2 + (-1 - 1)^2} = 2\sqrt{6}.$$

Exercice 3.

Partie A

1. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$. Par somme, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^{-x} = +\infty$ et, comme $\lim_{Y \rightarrow +\infty} \ln(Y) = +\infty$, on conclut, par composition, que, $\lim_{-\infty} f = +\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Par somme, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1$ et, comme \ln est continue en 1, $\lim_{Y \rightarrow 1} \ln(Y) = \ln(1) = 0$ donc, on conclut, par composition, que, $\lim_{+\infty} f = 0$.

2. La fonction $u : x \mapsto 1 + e^{-x}$ est dérivable sur \mathbb{R} comme somme et composée de fonctions dérivables et, pour tout réel x , $u'(x) = -e^{-x}$. On en déduit que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

3. La fonction \exp est à valeur strictement positives donc, pour tout réel x , $\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} > 0$ donc $f'(x) < 0$ et ainsi f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

4. Soit $m \in]0; +\infty[$.

a. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus, $m \in]\lim_{+\infty} f; \lim_{-\infty} f[$. Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = m$ possède une unique solution α_m dans \mathbb{R} .

b. Résolvons l'équation $f(x) = m$:

$$\begin{aligned} f(x) = m &\Leftrightarrow \ln(1 + e^{-x}) = m \Leftrightarrow 1 + e^{-x} = \ln(m) \Leftrightarrow e^{-x} = e^m - 1 \\ &\Leftrightarrow -x = \ln(e^m - 1) \Leftrightarrow x = -\ln(e^m - 1). \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha_m = -\ln(e^m - 1)$.

Partie B

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n) + f(n+1) - (f(0) + f(1) + \dots + f(n)) = f(n+1).$$

Or, on a vu dans la **Partie A** que f décroît vers 0 donc, pour tout réel x , $f(x) \geq 0$. En particulier, $f(n+1) \geq 0$ i.e. $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante. Démontrer que (u_n) est croissante.

2. a. Par propriété, pour tout réel t , $e^t \geq 1 + t$. Dès lors, pour tout réel $t > -1$, $\ln(e^t) \geq \ln(1 + t)$ i.e. $\ln(1 + t) \leq t$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_n &= f(0) + f(1) + \dots + f(n) \\ &= \ln(1 + e^{-0}) + \ln(1 + e^{-1}) + \dots + \ln(1 + e^{-n}) \\ &\leq e^{-0} + e^{-1} + \dots + e^{-n} \\ &\leq (e^{-1})^0 + (e^{-1})^1 + \dots + (e^{-1})^n \end{aligned}$$

On reconnaît dans cette dernière somme la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison e^{-1} donc

$$u_n \leq \frac{1 - (e^{-1})^{n+1}}{1 - e^{-1}}$$

et, de plus, $(e^{-1})^{n+1} \geq 0$ donc

$$u_n \leq \frac{1}{1 - e^{-1}}.$$

3. On vient de montrer que (u_n) est une suite réelle croissante et majorée par $\frac{1}{1 - e^{-1}}$ donc, par le théorème des suites monotones, (u_n) converge vers un réel ℓ .

4. a. On a

$$\begin{aligned} u_N - u_n &= f(0) + f(1) + \dots + f(n) + f(n+1) + \dots + f(N) - (f(0) + f(1) + \dots + f(n)) \\ &= f(n+1) + f(n+2) + \dots + f(N) \\ &= \ln(1 + e^{-(n+1)}) + \ln(1 + e^{-(n+2)}) + \dots + \ln(1 + e^{-N}) \\ &\leq e^{-(n+1)} + e^{-(n+2)} + \dots + e^{-N} \\ &\leq (e^{-1})^{n+1} + (e^{-1})^{n+2} + \dots + (e^{-1})^N \end{aligned}$$

On reconnaît là encore une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique donc

$$u_N - u_n \leq (e^{-1})^{n+1} \frac{1 - (e^{-1})^{N-n}}{1 - e^{-1}} = \frac{(e^{-1})^{n+1} - (e^{-1})^{N+1}}{1 - e^{-1}}$$

et, de plus, $(e^{-1}) \geq 0$ donc

$$u_N - u_n \leq \frac{(e^{-1})^{n+1}}{1 - e^{-1}} = \frac{e^{-n-1}}{1 - e^{-1}}.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$ donc $\ell - u_n \geq 0$. Par ailleurs, pour tout entier $N \geq n$, $u_N - u_n \leq \frac{e^{-n-1}}{1 - e^{-1}}$ donc, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\ell - u_n \leq \frac{e^{-n-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{e^{-n}e^{-1}}{(e-1)e^{-1}} = \frac{e^{-n}}{e-1}$$

Ainsi, on a bien montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \ell - u_n \leq \frac{e^{-n}}{e-1}.$$

5.

def approximation(p):

 n=0

 u=fonction_f(0)

 while (exp(-n)/(exp(1)-1)>10**(-p)):

 n=n+1

 u=u+fonction_f(n)

 return(u)

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, u_n fournit une valeur approchée de ℓ à 10^{-p} près si $\frac{e^{-n}}{e-1} \leq 10^{-p}$. Or,

$$\frac{e^{-n}}{e-1} \leq 10^{-p} \Leftrightarrow e^{-n} \leq 10^{-p}(e-1) \Leftrightarrow -n \leq \ln(10^{-p}(e-1)) \Leftrightarrow n \geq -\ln(10^{-p}(e-1))$$

Ainsi, u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-p} près dès que n dépasse $-\ln(10^{-p}(e-1))$ donc, par exemple, pour $E(-\ln(10^{-p}(e-1))) + 1$ où E désigne la partie entière.