Devoir surveillé n°3

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.
Le barème est donné à titre indicatif.

Toute les réponses doivent être justifiées avec soin.

Exercice 1 (6 points)**.** Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis lancer le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le lancer du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le lancer du dé donne 6. À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'évènement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{\text{E}}$. La probabilité d'un évènement E sera notée P(E).

1. Représenter la situation par un arbre pondéré en utilisant uniquement les évènements B, G et leurs évènements contraires.

2. Montrer que $\text{P(G)} = \dfrac{7}{30}$.

3. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ? On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

4. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

  a. Déterminer la loi de X. (On justifiera avec précision sa réponse.)

  b. Calculer la probabilité que le joueur gagne exactement deux parties sur les quatre. On donnera la valeur exacte sous forme de fraction irréductible puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

5. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure ou égale à 0,999 ?

Exercice 2 (6 points)**.** Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$\text{A}\,(1\,;2\,;7)\,,\quad \text{B}\,(2\,;0\,;2)\,,\quad \text{C}\,(3\,;1\,;3)\quad \text{et}\quad \text{D}\,(3\,;-6\,;1)\,.$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;-2\,;1)$ est normal au plan (ABC).

3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

4. **a.** Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

  b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire à (ABC) et passant par D.

  c. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de D sur (ABC).

  d. En déduire que la distance de D au plan (ABC) est égale à $2\sqrt{6}$.

Exercice 3 (12 points)**.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

2. Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$.

3. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $m \in]0\,;+\infty[$.

a. Sans chercher à la résoudre, justifier que l'équation $f(x) = m$ possède une unique solution α_m dans $\mathbb{R}$.

b. Calculer explicitement α_m en fonction de m.

Partie B. — On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k).$$

1. Démontrer que (u_n) est croissante.

2. a. Justifier que, pour tout réel $t > -1$, $\ln(1+t) \leqslant t$.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-1}}$.

Indication : faire intervenir la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

3. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ. (On ne demande pas de déterminer la valeur de ℓ).

4. a. Soit n et N deux entiers naturels tels que $N > n$. Montrer que $u_N - u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-n-1}}{1 - \mathrm{e}^{-1}}$

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{e - 1}$.

5. Soit $p \in \mathbb{N}$. On souhaite écrire une fonction `approximation` en Python afin de déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-p} près.

Recopier et compléter la fonction `approximation` ci-dessous. On fera appel à la fonction `fonction_f` qui est telle que `fonction_f(x)` renvoie la valeur de $f(x)$. (Remarque : en Python, le logarithme népérien se note `log`.)

```
from math import *

def fonction_f(x):
    return(log(1+exp(-x)))

def approximation(p):
    n=0
    u=fonction_f(0)
    while (...):
        n=...
        u=u+...
    return(u)
```

6. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer, en fonction de p, une valeur de n telle que u_n fournisse une valeur approchée de ℓ à 10^{-p} près.