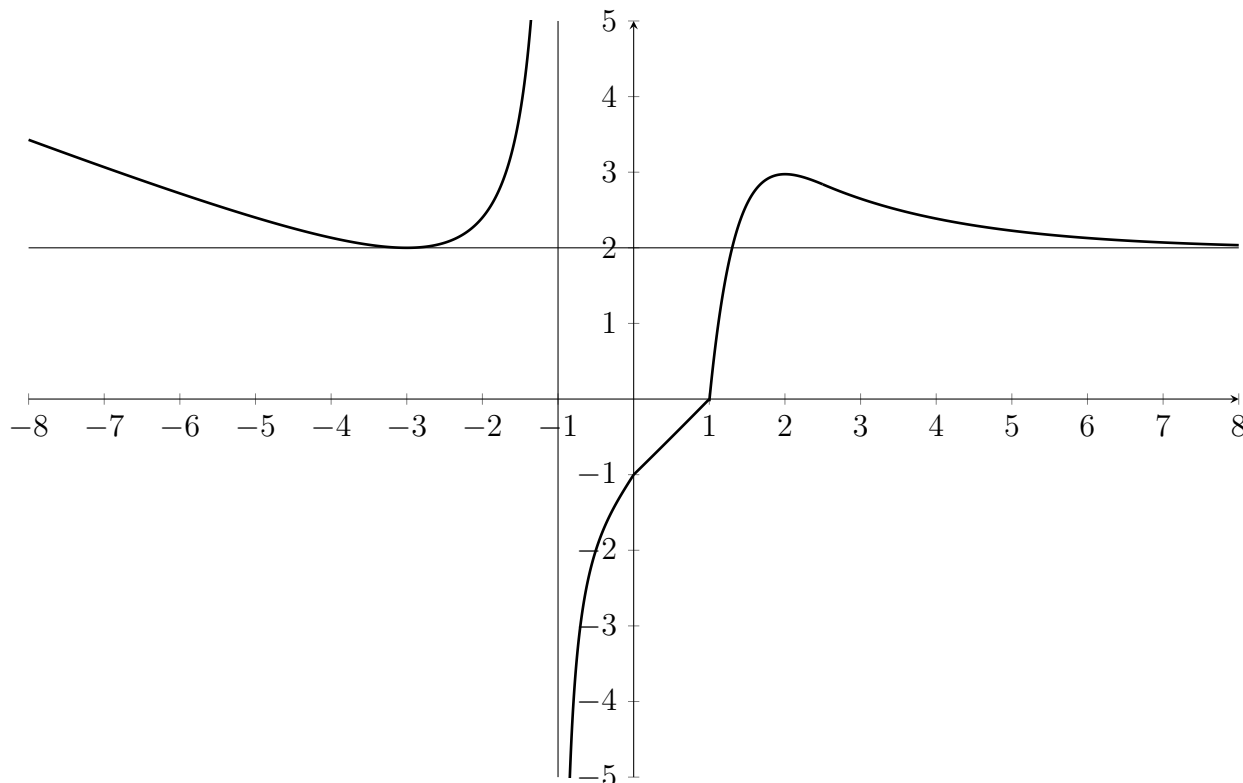


Corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 1.

1. Voici une courbe susceptible de représenter f .



2. a. $g(x)$ existe si et seulement si $f(x)$ existe et est différent de zéro. Ainsi, l'ensemble de définition de g est $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0}$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} g(x) = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x) = 0.$$

Finalement, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 0}$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 0^- \text{ donc } \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = +\infty} \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 0^+ \text{ donc } \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} g(x) = +\infty}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{2}}.$$

Exercice 2.

Partie A

1. Envoyer un bit constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,02 en prenant comme succès S : « le bit est mal transmis ».

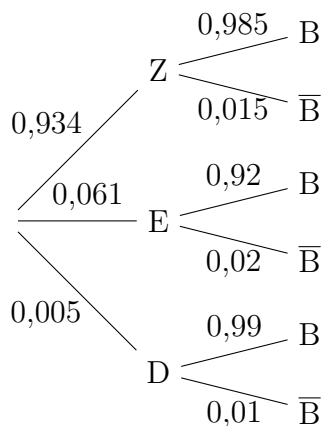
Envoyer un octet revient à répéter 8 fois de façon identique et indépendante cette épreuve : cela constitue donc un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(8, 0,02)$.

2. La probabilité qu'exactement deux bits de l'octet soient mal transmis est $P(X = 2)$. À l'aide de la calculatrice, on trouve $P(X = 2) \approx 0,01$.
3. L'évènement « au moins 1 bit de l'octet est mal transmis » est $[X \geq 1]$. Or, $\overline{[X \geq 1]} = [X < 1]$ et, comme X prend des valeurs entières, $[X < 1] = [X = 0]$. On en déduit que $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$. La probabilité qu'un bit soit bien transmis est 0,98 donc, par indépendance, la probabilité que les 8 bits soit bien transmis est $0,98^8$ i.e. $P(X = 0) = 0,98^8$. Ainsi, $P(X \geq 1) = 1 - 0,98^8 \approx 0,15$.

Partie B

1.



2. La probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur est $P(E \cap B)$. Or, $P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0,061 \times 0,92$ donc $P(E \cap B) = 0,05612$.
3. Les évènements Z, E et D forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales,

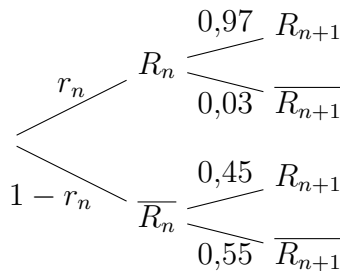
$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(Z)P_Z(B) + P(E)P_E(B) + P(D)P_D(B) \\
 &= 0,934 \times 0,985 + 0,061 \times 0,92 + 0,005 \times 0,99
 \end{aligned}$$

donc $P(B) = 0,98106$.

4. Comme $P_Z(B) = 0,985 \neq 0,98106 = P(B)$, les évènements Z et B ne sont pas indépendants.

Exercice 3.

1.



2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers, on déduit de la formule des probabilités totales que

$$r_{n+1} = P(R_{n+1}) = P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = r_n \times 0,97 + (1 - r_n) \times 0,45$$

Ainsi, $r_{n+1} = 0,97r_n + 0,45 - 0,45r_n = 0,52r_n + 0,45$ i.e. $r_{n+1} = \frac{13}{25}r_n + \frac{9}{20}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$u_{n+1} = r_{n+1} - \frac{15}{16} = \frac{13}{25}r_n + \frac{9}{20} - \frac{15}{16} = \frac{13}{25}r_n - \frac{39}{80} = \frac{13}{25}\left(r_n - \frac{15}{16}\right) = \frac{13}{25}u_n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{13}{25}$.

- b. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \left(\frac{13}{25}\right)^{n-1}$. Or, $u_1 = r_1 - \frac{15}{16} = 0,95 - \frac{15}{16} = \frac{1}{80}$ donc,

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{80} \left(\frac{13}{25}\right)^{n-1}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = r_n - \frac{15}{16}$ donc

$$r_n = u_n + \frac{15}{16}. \text{ Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, r_n = \frac{1}{80} \left(\frac{13}{25}\right)^{n-1} + \frac{15}{16}.$$

4. Comme $-1 < \frac{13}{25} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{13}{25}\right)^{n-1} = 0$ et donc, par produit et somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{15}{16}$.

Ceci signifie qu'à long terme, la probabilité qu'un client ramène la bouteille se stabilise autour de $\frac{15}{16}$.

Exercice 4.

1. Par définition, $u_1 = (0 + 1)u_0 - 1 = 0,5 - 1$ i.e. $u_1 = -0,5$ et $u_2 = (1 + 1)u_1 - 1 = 2 \times (-0,5) - 1$ i.e. $u_2 = -2$.

2. a. À l'aide de la calculatrice, on conjecture que (u_n) est décroissante.

- b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « $u_n \leq -0,5$ ».

Comme $u_1 = -0,5$, $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors, $u_k \leq -0,5$ donc, comme $k + 1 \geq 0$, $(k + 1)u_k \leq -0,5(k + 1) \leq 0$ donc $(k + 1)u_k - 1 \leq -1$ i.e. $u_{k+1} \leq -1$. À plus forte raison, $u_{k+1} \leq -0,5$ donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Ainsi, on a démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq -0,5$.

- c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$ alors $u_0 = 0,5 \leq -0,5 = u_1$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $u_{n+1} - u_n = (n + 1)u_n - 1 - u_n = nu_n - 1 \leq -1 < 0$ car $u_n < 0$ d'après 2.b. et $n \geq 0$ donc $u_{n+1} \leq u_n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ i.e. (u_n) est décroissante.

3. Nous donnons deux méthodes possibles.

Première méthode. — Comme (u_n) est décroissante, d'après le théorème des suites monotones, (u_n) converge vers un réel ℓ ou diverge vers $-\infty$.

Supposons, par l'absurde, que (u_n) converge vers ℓ . Comme $u_n \leq -0,5$ pour tout $n \geq 1$, $\ell < 0$. Dès lors, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1)u_n = -\infty$ et donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1)u_n - 1 = -\infty$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = -\infty$. C'est absurde car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Ainsi, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Seconde méthode. — Pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq -0,5$ donc, comme $n + 1 > 0$, $(n + 1)u_n \leq -0,5(n + 1)$. Dès lors, $u_{n+1} = (n + 1)u_n - 1 \leq -0,5(n + 1) - 1$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -0,5(n + 1) = -\infty$ car $-0,5 < 0$ donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -0,5(n + 1) - 1 = -\infty$. Par le théorème de comparaison, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = -\infty$ et donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty}$.

4. a.

$ \begin{array}{l} U \leftarrow 0,5 \\ N \leftarrow 0 \\ \text{Tant que } U > A \\ \quad \left \begin{array}{l} U \leftarrow (N + 1)U - 1 \\ N \leftarrow N + 1 \end{array} \right. \\ \text{Fin Tant que} \end{array} $

b. Cet algorithme est un algorithme de seuil.