

Devoir surveillé n°2

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Exercice 1 (3 points). On considère une fonction f dont le tableau de variation est le suivant.

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$		$+\infty$		3	
		2		$-\infty$	0	2

- Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f . (On fera également apparaître les éventuelles asymptotes.)
- Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
 - Quel est l'ensemble de définition de g ?
 - Déterminer, en justifiant, les limites de g aux bornes de son ensemble de définition (éventuellement à droite et à gauche).

Exercice 2 (6 points).

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...

Une suite de 8 bits est appelée un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie A. — On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet.

On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,02. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

- Déterminer, en justifiant avec soin, la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- Déterminer la probabilité qu'exactement deux bits de l'octet soient mal transmis. On donnera une valeur arrondie à 10^{-2} près.
- Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'au moins 1 bit de l'octet soit mal transmis puis en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

Partie B. — Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l’octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d’erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l’octet à transmettre, un bit, appelé « bit de parité », qui est transmis après les huit bits de l’octet.

On s’intéresse désormais à la transmission de l’octet suivi de son bit de parité (ce qui représente donc 9 bits en tout).

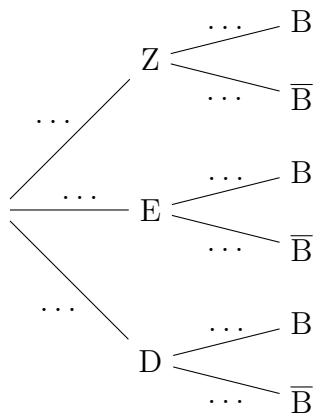
Une étude statistique a permis d’estimer que :

- la probabilité que les huit bits de l’octet soient transmis sans erreur vaut 0,934 ;
- la probabilité que les huit bits de l’octet soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,061 ;
- si les huit bits de l’octet ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,985 ;
- si les huit bits de l’octet ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,92 ;
- si les huit bits de l’octet ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les évènements suivants :

- Z : « les huit bits de l’octet sont transmis sans aucune erreur » ;
- E : « les huit bits de l’octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
- D : « les huit bits de l’octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;
- B : « le bit de parité est transmis sans erreur ».

1. Reproduire et compléter l’arbre suivant :



2. Quelle est la probabilité que l’octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?
3. Calculer la probabilité de l’évènement B .
4. Les évènements Z et B sont-ils indépendants ?

Exercice 3 (5 points). — Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l’agriculteur reste constant.

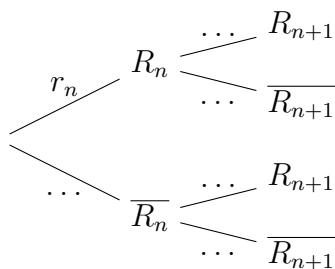
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,95 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,97 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,45.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n -ième semaine ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n -ième semaine. On a ainsi $r_n = P(R_n)$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



2. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = \frac{13}{25}r_n + \frac{9}{20}$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = r_n - \frac{15}{16}$.
 - a. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{13}{25}$.
 - b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de u_n en fonction de n et en déduire une expression de r_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de la suite (r_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 (6 points). On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 .
2.
 - a. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations de (u_n) .
 - b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq -0,5$.
 - c. Démontrer ou infirmer la conjecture faite en question 2.a..
3. Démontrer que (u_n) diverge vers $-\infty$.
4.
 - a. Soit A un réel. Reproduire et compléter l'algorithme ci-dessous de telle sorte qu'à la fin de l'exécution, la variable N contienne la valeur du premier indice n tel que $u_n \leq A$.

$U \leftarrow 0,5$ $N \leftarrow 0$ Tant que ... $U \leftarrow \dots$ $N \leftarrow N + 1$ Fin Tant que
--

- b. Comment appelle-t-on ce type d'algorithme ?