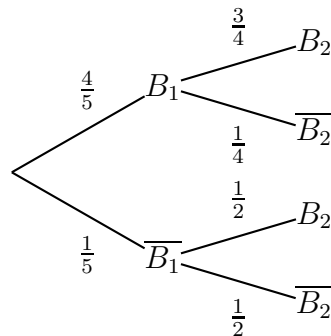


Correction du devoir surveillé n°2

EXERCICE 1

1. a.



b. La probabilité de tirer une boule blanche dans chaque urne lors d'une partie est $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4}$ i.e. $\boxed{P(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{5}}$.

c. Les événements B_1 et $\overline{B_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5} + \frac{1}{10}$$

i.e. $\boxed{P(B_2) = \frac{7}{10}}$.

d. La probabilité d'avoir tiré une boule blanche dans U_1 sachant qu'on a tiré une boule blanche dans l'urne U_1 est

$$P_{B_2}(B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{10}} = \frac{3}{5} \times \frac{10}{7}$$

i.e. $\boxed{P_{B_2}(B_1) = \frac{6}{7}}$.

2. a. Une partie constitue une épreuve de Bernoulli en prenant comme succès S : « Tirer une boule blanche dans l'urne U_2 ».

Effectuer 10 parties consécutives revient à répéter 10 fois de façon identique et indépendante cette même épreuve de Bernoulli : cela constitue un schéma de Bernoulli.

Ainsi, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{7}{10}$.

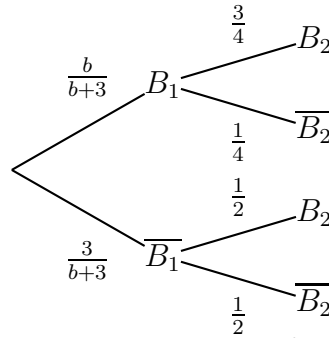
b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\boxed{P(X = 3) \approx 0,009}$.

c. Étant donné que $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$, on trouve, à l'aide de la calculatrice, $\boxed{P(X \geq 3) \approx 0,998}$.

d. Par théorème, $E(X) = 10 \times \frac{7}{10} = 7$ donc, en moyenne, on tire 7 boules blanches tirées dans l'urne U_2 au cours de 10 parties.

3. a. Puisque $P(B_2) = \frac{7}{10}$ et $P_{B_1}(B_2) = \frac{3}{4}$, on a $P(B_2) \neq P_{B_1}(B_2)$ donc les événements B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.

b. Supposons qu'il y ait b boules blanches dans l'urne U_1 . On obtient alors l'arbre suivant :



En raisonnant comme dans la question 1.c., on a donc

$$P(B_2) = \frac{b}{b+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{b+3} \times \frac{1}{2} = \frac{3b+6}{4(b+3)}.$$

Ainsi, $P(B_1)P(B_2) = \frac{b}{b+3} \times \frac{3b+6}{4(b+3)} = \frac{3b(b+2)}{4(b+3)^2}$. Or, $P(B_1 \cap B_2) = \frac{b}{b+3} \times \frac{3}{4} = \frac{3b}{4(b+3)}$ donc B_1 et B_2 sont indépendants si et seulement si $\frac{3b(b+2)}{4(b+3)^2} = \frac{3b}{4(b+3)}$ i.e. $b(b+2) = b(b+3)$ ce qui donne $2b = 3b$ soit $b = 0$. Ainsi, il est possible que les événements B_1 et B_2 soient indépendants mais seulement si l'urne U_1 ne contient pas de boules blanches.

EXERCICE 2

1. Par définition, $u_2 = k \frac{u_1^2}{u_0} = k \times \frac{k^2}{1}$ donc $\boxed{u_2 = k^3}$. De la même façon, on trouve $\boxed{u_3 = k^6}$ et $\boxed{u_4 = k^{10}}$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = u_{n+2} \times \frac{1}{u_{n+1}} = k \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \times \frac{1}{u_{n+1}} = k \frac{u_{n+1}}{u_n} = k a_n$$

donc $\boxed{(a_n) \text{ est une suite géométrique de raison } k \text{ et de premier terme } a_0 = \frac{u_1}{u_0} = k}$.

- b. On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, a_n = k \times k^n = k^{n+1}}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = k^{n+1}$ i.e. $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = k^{n+1} u_n}$.
3. Si $k = 1$ alors, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1^{n+1} u_n = u_n$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est constante}}$.

4. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P_n : \ll u_n > 0 \gg$.

Par définition, $u_0 = 1 > 0$ donc P_0 est vraie.

Supposons que P_m est vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

Alors, $u_m > 0$. Or, comme $k > 0$, $k^{m+1} > 0$ donc, par produit, $k^{m+1} u_m > 0$ i.e., d'après la question 2.b., $u_{m+1} > 0$. Ainsi, P_{m+1} est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n > 0}$.

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $k > 1$, $k^{n+1} > 1$ donc, comme $u_n > 0$, $k^{n+1} u_n > u_n$ i.e., d'après la question 2.b., $u_{n+1} > u_n$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

- b. Comme (u_n) est croissante, d'après le théorème des suites monotones, soit (u_n) converge vers un réel ℓ soit (u_n) diverge vers $+\infty$. Supposons, par l'absurde, que (u_n) converge vers un réel ℓ . Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et, comme (u_n) est croissante et $u_0 = 1$, $\ell \geq 1$. Par ailleurs, comme $k > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^{n+1} = +\infty$ donc, puisque $\ell > 0$, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^{n+1} u_n = +\infty$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = +\infty$. Or, comme (u_n) converge

vers ℓ , (u_{n+1}) converge également vers ℓ . On aboutit à une contradiction donc (u_n) ne converge pas. Il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

c. Le tableau suivant décrit le fonctionnement de l'algorithme pour $k = 2$ et $A = 1\,000$.

	U	N	$U < 1\,000$
Initialisation	1	0	vrai
début de la boucle <i>Tant que</i>			
Étape 1	2	1	vrai
Étape 2	8	2	vrai
Étape 3	64	3	vrai
Étape 4	1 024	4	faux
Fin de la boucle <i>Tant que</i>			
Affichage	4		

Le nombre obtenu à l'affichage, à savoir 4, est le premier entier n tel que $u_n \geq 1\,000$ lorsque $k = 2$.

d. Soit $k > 1$. On a vu à la question 5.b. que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ donc, quel que soit le réel A , il existe un entier n tel que $u_n \geq A$. Si on note n_0 le plus petit des entiers n tels que $u_n \geq A$ alors, comme la variable U de l'algorithme contient les valeurs successives de la suite (u_n) , on est assuré qu'au bout de $n_0 - 1$ tours de boucle l'algorithme s'arrête et affiche n_0 .

6. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition Q_n : « $u_n \leq k^n$ ».

Par définition, $u_0 = 1 = k^0$ donc Q_0 est vraie.

Supposons que Q_m est vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

Alors, $u_m \leq k^m$. Or, $0 < k < 1$ donc $k^m < 1$ et ainsi $u_m < 1$. Comme $k^{m+1} > 0$, on en déduit que $k^{m+1}u_m \leq k^{m+1}$ i.e., d'après la question 2.c., $u_{m+1} \leq k^{m+1}$. Ainsi, Q_{m+1} est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leq k^n}$.

b. D'après les questions 4. et 6.a., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq k^n$. Or, $0 < k < 1$ donc, $\lim_{k \rightarrow +\infty} k^n = 0$. On déduit alors du théorème d'encadrement que (u_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}.$$

7. Les premières valeurs de (u_n) semblent indiquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de la forme k^{c_n} où $c_n \in \mathbb{N}$. Si cela est effectivement le cas alors la relation de récurrence de la question 2.b. entraîne que $k^{c_{n+1}} = k^{n+1}k^{c_n} = k^{c_n+n+1}$ donc (c_n) vérifie la relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n + (n + 1)$. Sachant, de plus, que $u_0 = 1$, on a $c_0 = 0$. Dès lors, $c_1 = 0 + 1 = 1$, $c_2 = 1 + 2 = 3$, $c_3 = 3 + 3 = 6$, $c_4 = 6 + 4 = 10...$ et ainsi c_n est la somme des entiers de 0 à n donc $c_n = \frac{n(n+1)}{2}$. On peut donc conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = k^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Démontrons-le par récurrence.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition R_n : « $u_n = k^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ».

$u_0 = 1$ et $k^{\frac{0(0+1)}{2}} = k^0 = 1$ donc R_0 est vraie.

Supposons que R_m est vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

Alors, d'après la question 2.b.

$$u_{m+1} = k^{m+1}u_m = k^{m+1}k^{\frac{m(m+1)}{2}} = k^{m+1+\frac{m(m+1)}{2}}$$

Or,

$$m+1 + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{2(m+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

donc $u_{m+1} = k^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}}$ i.e. R_{m+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = k^{\frac{n(n+1)}{2}}}$.