

# Devoir surveillé n°2

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

## EXERCICE 1 (10 points)

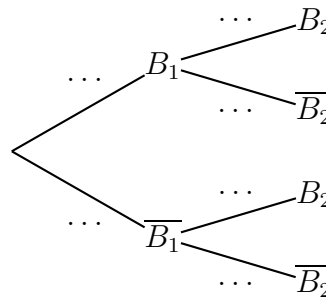
On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$  contenant des boules indiscernables au toucher. L'urne  $U_1$  contient 12 boules blanches et 3 boules noires et l'urne  $U_2$  contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans l'urne  $U_1$  et on la place dans l'urne  $U_2$ . On tire ensuite, au hasard, une boule dans l'urne  $U_2$ . L'ensemble de ces opérations constitue une partie.

On note  $B_1$  l'évènement « on a tiré une boule blanche dans l'urne  $U_1$  ».

On note  $B_2$  l'évènement « on a tiré une boule blanche dans l'urne  $U_2$  ».

1. a. Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



- b. Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche dans chaque urne lors d'une partie.
- c. Démontrer que la probabilité de l'évènement  $B_2$  est égale à  $\frac{7}{10}$ .
- d. La boule tirée dans  $U_2$  est blanche. Quelle est la probabilité d'avoir tiré une boule blanche dans  $U_1$  ?
2. Un joueur effectue 10 parties. Au début de chaque partie, l'urne  $U_1$  contient 12 boules blanches et 3 boules noires et l'urne  $U_2$  contient 2 boules blanches et 1 boule noire. Ainsi, les parties successives sont indépendantes. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées dans l'urne  $U_2$  au cours des 10 parties.
- a. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- b. Déterminer la probabilité que le joueur tire exactement 3 boules blanches dans l'urne  $U_2$  au cours des dix parties. On donnera une valeur arrondie à  $10^{-3}$  près.
- c. Déterminer la probabilité que le joueur tire au moins 3 boules blanches dans l'urne  $U_2$  au cours des dix parties. On donnera une valeur arrondie à  $10^{-3}$  près.
- d. Quel est le nombre moyen de boules blanches tirées dans l'urne  $U_2$  au cours de 10 parties ?
3. a. Montrer que les évènements  $B_1$  et  $B_2$  ne sont pas indépendants.
- b. En modifiant le nombre de boules blanches dans l'urne  $U_1$ , peut-on obtenir une configuration dans laquelle les évènements  $B_1$  et  $B_2$  seraient indépendants ?

**EXERCICE 2 (10 points).** — Soit  $k$  un réel strictement positif. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = k$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+2} = k \frac{u_{n+1}^2}{u_n}.$$

On admet que cette suite est bien définie i.e. que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq 0$ .

1. Exprimer  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$  en fonction de  $k$ .
2. On considère la suite  $(a_n)$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ .
  - a. Démontrer que  $(a_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme en fonction de  $k$ .
  - b. Donner, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression de  $a_n$  en fonction de  $n$  et en déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = k^{n+1}u_n$ .
3. Que peut-on dire que  $(u_n)$  si  $k = 1$  ?
4. On suppose à nouveau que  $k$  est un réel strictement positif quelconque.  
Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ .
5. On suppose que  $k > 1$ .
  - a. Démontrer que  $(u_n)$  est croissante.
  - b. En raisonnant par l'absurde, démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
  - c. On considère l'algorithme suivant.

```

U ← 1
N ← 0
Tant que U < A
    | U ← kN+1U
    | N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
  
```

Faire fonctionner cet algorithme avec  $k = 2$  et  $A = 1\,000$ .

Que représente le nombre obtenu à l'affichage ?

- d. Pourquoi est-on certain que, pour toute valeur de  $k > 1$  et toute valeur de  $A \in \mathbb{R}$ , l'algorithme précédent affiche une valeur au bout d'un nombre fini d'étapes ?
6. On suppose que  $k < 1$ .
  - a. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq k^n$ .
  - b. En déduire, en utilisant aussi la question 4., que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
7. Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression de  $(u_n)$  en fonction de  $n$ .