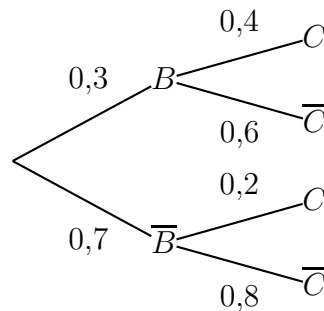


Correction du devoir surveillé n°2

EXERCICE 1

1. a.



b. La probabilité que l'invité prenne une bille au chocolat blanc fourrée au café est $P(B \cap C) = P(B)P_B(C) = 0,3 \times 0,4$ i.e. $P(B \cap C) = 0,12$.

c. Les événements B et $\bar{B}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(C) = P(B)P_B(C) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(C) = 0,3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,2 = 0,12 + 0,14$$

i.e. $P(C) = 0,26$.

d. La probabilité d'avoir pris une bille au chocolat blanc sachant qu'elle est fourrée au café est

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{0,12}{0,26}$$

i.e. $P_C(B) = \frac{6}{13}$.

2. a. Un prélèvement constitue une épreuve de Bernoulli en prenant comme succès S : « L'invité prend une bille fourrée au café ».

Effectuer 8 prélèvements en les assimilant à des tirages avec remise revient à répéter 8 fois de façon identique et indépendante cette même épreuve de Bernoulli : cela constitue un schéma de Bernoulli.

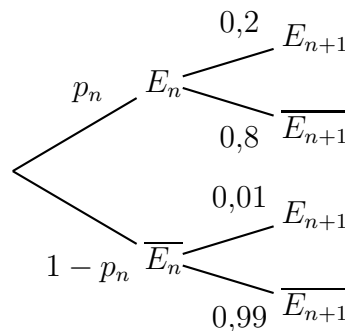
Ainsi, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres 8 et 0,26.

b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $P(X = 3) \approx 0,218$.

c. Étant donné que $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$, on trouve, à l'aide de la calculatrice, $P(X \geq 3) \approx 0,347$.

EXERCICE 2

1.



2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les événements E_n et $\overline{E_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(E_{n+1}) &= P(E_n)P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\overline{E_n})P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,2 + (1 - p_n) \times 0,01 = 0,2p_n + 0,01 - 0,01p_n \end{aligned}$$

i.e. $p_{n+1} = 0,19p_n + 0,01$ soit encore $p_{n+1} = \frac{19}{100}p_n + \frac{1}{100}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{81} = \frac{19}{100}p_n + \frac{1}{100} - \frac{1}{81} = \frac{19}{100}p_n - \frac{19}{8100} \\ &= \frac{19}{100} \left(p_n - \frac{19}{8100} \times \frac{100}{19} \right) = \frac{19}{100} \left(p_n - \frac{1}{81} \right) = \frac{19}{100}u_n \end{aligned}$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{19}{100}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{81}$ i.e.

$$u_1 = -\frac{1}{81}.$$

4. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -\frac{1}{81} \left(\frac{19}{100} \right)^{n-1}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$p_n = u_n + \frac{1}{81} \text{ donc, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{1}{81} - \frac{1}{81} \left(\frac{19}{100} \right)^{n-1}.$$

5. Comme $-1 < \frac{19}{100} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{19}{100} \right)^{n-1} = 0$ et donc, par produit et somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{81}$.

EXERCICE 3

1. Par définition, $a_1 = \sqrt{a_0 b_0} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16}$ i.e. $a_1 = 4$ et $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{2+8}{2}$ i.e. $b_1 = 5$.

De même, $a_2 = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20}$ i.e. $a_2 = 2\sqrt{5}$ et $b_2 = \frac{4+5}{2}$ i.e. $b_2 = \frac{9}{2}$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par définition, $a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$ et $b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ donc

$$\begin{aligned} b_n^2 - a_n^2 &= \left(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right)^2 - \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}^2 = \frac{a_{n-1}^2 + 2a_{n-1}b_{n-1} + b_{n-1}^2}{4} - a_{n-1}b_{n-1} \\ &= \frac{a_{n-1}^2 + 2a_{n-1}b_{n-1} + b_{n-1}^2 - 4a_{n-1}b_{n-1}}{4} = \frac{a_{n-1}^2 - 2a_{n-1}b_{n-1} + b_{n-1}^2}{4} \end{aligned}$$

$$\text{et donc } b_n^2 - a_n^2 = \left(\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} \right)^2.$$

- b. D'une part, $a_0 = 2 \leq 8 = b_0$ donc $a_0 \leq b_0$. D'autre part, si $n \in \mathbb{N}^*$ alors, d'après la question précédente, $b_n^2 - a_n^2 = \left(\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} \right)^2$ donc $b_n^2 - a_n^2 \geq 0$ i.e. $b_n^2 \geq a_n^2$. Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, il s'ensuit que $\sqrt{b_n^2} \geq \sqrt{a_n^2}$ i.e., sachant que a_n et b_n sont positifs, $b_n \geq a_n$. Ainsi, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$.
3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la question 2.b., $a_n \leq b_n$ donc, en multipliant par $a_n \geq 0$, $a_n^2 \leq a_n b_n$ et, par croissance de la racine carrée sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{a_n^2} \leq \sqrt{a_n b_n}$. On conclut, comme précédemment que $a_n \leq a_{n+1}$. Ainsi, (a_n) est croissante.

De même, comme $a_n \leq b_n$, $a_n + b_n \leq 2b_n$ donc $\frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n$ i.e. $b_{n+1} \leq b_n$. Ainsi,

(b_n) est décroissante.

b. On déduit de la question 3.a. que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq a_0 = 2$ et $b_n \leq b_0 = 8$. Dès lors, d'après la question 2.b., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq a_n \leq b_n \leq 8$. Ainsi, (a_n) est croissante et majorée par 8 et (b_n) est décroissante et minorée par 2 donc, d'après le théorème des suites monotones, (u_n) et (v_n) convergent.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ donc $a_n + b_n = 2b_{n+1}$. Or, par somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + b_n = \ell + \ell'$ et, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell'$, on a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \ell'$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2b_{n+1} = 2\ell'$. Par unicité de la limite, on en déduit que $\ell + \ell' = 2\ell'$ et donc $\ell = \ell'$.

d. Comme (a_n) est croissante et tend vers ℓ , par théorème, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \ell$. De même, (b_n) est décroissante et tend vers ℓ donc, par théorème, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq \ell$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \ell \leq b_n$.

4. a. Le tableau suivant donne le fonctionnement de l'algorithme pour $e = 10^{-5}$.

	C	A	B	N	$B - A > e$
Initialisation		2	8	0	vrai
début de la boucle <i>Tant que</i>					
Étape 1	2	4	5	1	vrai
Étape 2	4	4,47213595	4,5	2	vrai
Étape 3	4,47213595	4,48604634	4,48606797	3	vrai
Étape 4	4,48604634	4,48605716	4,48605716	4	faux
Fin de la boucle <i>Tant que</i>					
Affichage	4,48605716 4,48605716				

b. Les valeurs A et B obtenues à l'affichage fournissent un encadrement de ℓ d'amplitude inférieure ou égale à e . Les erreurs d'arrondi peuvent laisser croire que $A = B$ dans le cas précédent mais en fait la question précédente nous donne l'encadrement $4,48605716 \leq \ell \leq 4,48605717$