

# Devoir surveillé n°2

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

**EXERCICE 1 (7 points).** — Elsa a préparé un grand saladier de billes de chocolat pour son anniversaire. On y trouve :

- 30 % de billes au chocolat blanc, les autres étant au chocolat noir ;
- parmi les billes au chocolat blanc, 40 % sont fourrées au café et les autres au praliné ;
- parmi les billes au chocolat noir, 20 % sont fourrées au café et les autres au praliné.

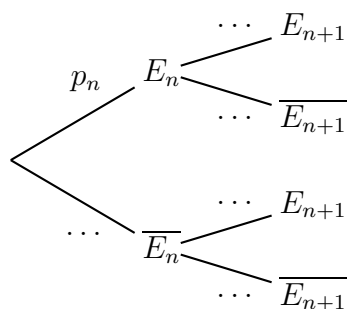
1. Un invité prend une bille de chocolat au hasard dans le saladier. On considère les événements  $B$  : « l'invité prend une bille au chocolat blanc » et  $C$  : « l'invité prend une bille fourrée au café ».
  - a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
  - b. Déterminer la probabilité que l'invité prenne une bille au chocolat blanc fourrée au café.
  - c. Montrer que la probabilité que l'invité prenne une bille fourrée au café est 0,26.
  - d. Sachant que la bille est fourrée au café, quelle est la probabilité que l'invité ait pris une bille au chocolat blanc ? On donnera la valeur exacte sous forme d'une fraction irréductible.
2. Un invité prend successivement 8 billes de chocolat dans le saladier. On suppose que le nombre de billes est suffisamment grand pour que ces 8 prélèvements ne modifient pas de manière significative la composition du saladier. Ainsi, on peut assimiler ces 8 prélèvements à des tirages avec remise. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de billes fourrées au café obtenues lors des 8 prélèvements.
  - a. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
  - b. Déterminer la probabilité que l'invité prenne exactement 3 billes fourrées au café au cours des 8 prélèvements. On donnera une valeur arrondie à  $10^{-3}$  près.
  - c. Déterminer la probabilité que l'invité prenne au moins 3 billes fourrées au café au cours des 8 prélèvements. On donnera une valeur arrondie à  $10^{-3}$  près.

**EXERCICE 2 (6 points).** — Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe. On sait que lorsque le salarié est malade alors il est absent. De plus, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , si le salarié n'est pas malade la semaine  $n$ , la probabilité qu'il tombe malade la semaine  $n+1$  est 0,01 et, si le salarié est malade la semaine  $n$ , la probabilité qu'il soit encore malade la semaine  $n+1$  est 0,2.

Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on note  $E_n$  l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la  $n$ -ième semaine » et  $p_n$  la probabilité de l'évènement  $E_n$ .

Enfin, on suppose que la semaine 1, le salarié n'est pas malade donc  $p_1 = 0$ .

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-après.



2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $p_{n+1} = \frac{19}{100}p_n + \frac{1}{100}$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , par  $u_n = p_n - \frac{1}{81}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'expression de  $u_n$  puis de  $p_n$  en fonction de  $n$ .
5. Déterminer la limite de la suite  $(p_n)$ .

**EXERCICE 3 (7 points).** — On considère deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par  $a_0 = 2$ ,  $b_0 = 8$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}.$$

On admet que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \geq 0$  et  $b_n \geq 0$  et qu'ainsi  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont bien définies.

1. Calculer les valeurs exactes de  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$ .
2. **a.** Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_n^2 - a_n^2 = \left(\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}\right)^2$ .  
**b.** En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \leq b_n$ .  
*(Indication. Distinguer les deux cas  $n = 0$  et  $n > 0$ .)*
3. **a.** En utilisant la question **2.b.**, montrer que  $(a_n)$  est croissante et que  $(b_n)$  est décroissante.  
**b.** Déduire des questions **2.b.** et **3.a.** que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent.  
**c.** On note  $\ell$  la limite de  $(a_n)$  et  $\ell'$  la limite de  $(b_n)$ . En utilisant le fait que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ , montrer que  $\ell = \ell'$ .  
**d.** Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \leq \ell \leq b_n$ .
4. On considère l'algorithme suivant.

```

A ← 2
B ← 8
N ← 0
Tant que B - A > e
    C ← A
    A ← √CB
    B ← (C + B)/2
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher A et B

```

- a.** Faire fonctionner cet algorithme avec  $e = 10^{-5}$ . On donnera à chaque étape des valeurs exactes ou des valeurs approchées à  $10^{-8}$  près des variables.
- b.** Si on fait fonctionner l'algorithme avec un réel  $e > 0$  quelconque, que représentent pour  $\ell$  les nombres obtenus à l'affichage ?