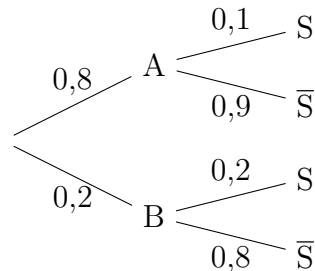


Correction du devoir surveillé n°2

EXERCICE 1

Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre pondéré suivant :



2. D'après l'arbre,

$$P(\bar{S}) = 0,8 \times 0,9 + 0,2 \times 0,8 = 0,88$$

donc la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.

3. On cherche $P_S(B)$. Or,

$$P_S(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(B) \times P_B(S)}{1 - P(\bar{S})} = \frac{0,2 \times 0,2}{1 - 0,88} = \frac{1}{3}$$

donc $\boxed{P_S(B) \approx 0,33}$.

Partie B

1. Acheter une boîte constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,88 en prenant comme succès $\bar{S}$.

Comme on assimile le prélèvement de 10 boîtes à un tirage avec remise, acheter 10 boîtes revient à répéter 10 fois de façon indépendante cette épreuve : cela constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$.

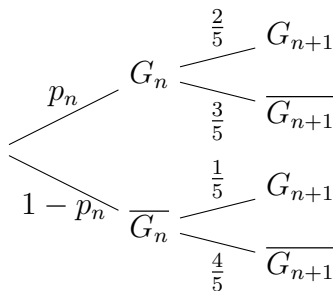
Dès lors, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0,88)$.

2. A l'aide de la calculatrice, $\boxed{P(X = 10) \approx 0,28}$.

3. A l'aide de la calculatrice, $\boxed{P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 0,89}$.

EXERCICE 2

1.



2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'arbre, $P(G_{n+1}) = p_n \times \frac{2}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{5}$ i.e. $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}p_n$

soit $\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}}.$

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \left(p_n - \frac{1}{4} \right)$$

i.e. $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n$. Ainsi, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. De plus,

son premier terme est $u_1 = p_1 - \frac{1}{4}$ soit $\boxed{u_1 = \frac{3}{4}}.$

b. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ i.e.

$$u_n = \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}. \text{ Or, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, p_n = u_n + \frac{1}{4} \text{ donc } \boxed{p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}}.$$

c. Etant donné que $-1 < \frac{1}{5} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ et donc, par produit et somme,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{4}}.$$

EXERCICE 3

1. a. Le tableau suivant présente les différentes étapes de l'algorithme lorsqu'on entre $n = 3$.

Étape	Initialisation	1	2	3	Sortie
i		1	2	3	
u	2	1,4142	1,6818	1,8340	1,8340

$\boxed{\text{L'algorithme affiche en sortie environ 1,8340.}}$

b. Cet algorithme calcule en sortie la valeur de u_n pour une valeur de n donnée en entrée.

c. On peut conjecturer que (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 2.

2. Considérons la proposition $P_n : \ll 1 \leq u_n \leq 2 \gg$.

Par définition, $u_0 = 1$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$ et ainsi P_0 est vraie.

Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $1 \leq u_k \leq 2$ donc, comme $2 > 0$, $2 \leq 2u_k \leq 4$ et, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{2} \leq \sqrt{2u_k} \leq \sqrt{4}$. Ainsi, $\sqrt{2} \leq u_{k+1} \leq 2$ et donc, comme $\sqrt{2} \geq 1$, $1 \leq u_{k+1} \leq 2$. Ainsi, P_{k+1} est vraie et on a montré par récurrence que,
 $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.

3. a. Considérons la proposition $H_n : \ll u_n \leq u_{n+1} \gg$.

Comme $u_0 = 1 \leq \sqrt{2} = u_1$, H_0 est vraie.

Supposons que H_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, grâce à la question 2., $1 \leq u_k \leq u_{k+1}$ donc, comme $2 > 0$, $2 \leq 2u_k \leq 2u_{k+1}$ et, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{2u_k} \leq \sqrt{2u_{k+1}}$. On en déduit que $u_{k+1} \leq u_{k+2}$ donc H_{k+1} est vraie. On a donc montré par récurrence que,
 (u_n) est croissante.

- b. D'après les deux questions précédentes, (u_n) est croissante et majorée par 2 donc, d'après le théorème des suites monotones, (u_n) converge vers une limite $\ell \leq 2$.

- c. D'une part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ donc, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^2 = \ell^2$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = 2u_n$ donc, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^2 = 2\ell$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}^2) , on en déduit que $\ell^2 = 2\ell$. Ainsi, $\ell(\ell - 2) = 0$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = 2$. Or, (u_n) est croissante et $u_0 = 1$ donc $\ell \geq 1$. On conclut donc que $\ell = 2$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $(2 - u_{n+1})(2 + u_{n+1}) = 4 - u_{n+1}^2 = 4 - 2u_n = 2(2 - u_n)$ donc, comme

$$2 + u_{n+1} > 0 \text{ (car } (u_n) \text{ est minorée par 1), on conclut que } \boxed{2 - u_{n+1} = \frac{2(2 - u_n)}{2 + u_{n+1}}}.$$

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu à la question 2. que (u_n) est majorée par 2 donc $u_{n+1} \leq 2$ et ainsi $2 - u_{n+1} \geq 0$. Par ailleurs, on a également vu à la même question 2. que (u_n) est minorée par 1 donc $u_{n+1} \geq 1$ et ainsi $2 + u_{n+1} \geq 3$. Par décroissance de la fonction inverse, on en déduit que $\frac{1}{2 + u_{n+1}} \leq \frac{1}{3}$. Or, comme (u_n) est majorée par 2,

$$2(2 - u_n) \geq 0 \text{ donc } \frac{2(2 - u_n)}{2 + u_{n+1}} \leq \frac{2(2 - u_n)}{3}. \text{ La question précédente permet donc de dire que } 2 - u_{n+1} = \frac{2(2 - u_n)}{2 + u_{n+1}} \leq \frac{2}{3}(2 - u_n).$$

$$\text{On a donc bien montré que, } \boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(2 - u_n)}.$$

- c. Soit la proposition $Q_n : \ll 0 \leq 2 - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \gg$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $u_0 = 1$, $2 - u_0 = 1$. Or, $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ donc $0 \leq 2 - u_0 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$ i.e. Q_0 est vraie.

Supposons que Q_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, d'après la question précédente,

$$0 \leq 2 - u_{k+1} \leq \frac{2}{3}(2 - u_k) \leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}.$$

Ainsi, Q_{k+1} est vraie et on a montré par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 2 - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

- d. Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $(2 - u_n)$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - u_n) = 0$. En remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 - (2 - u_n)$, on conclut par somme que $\boxed{\ell = 2}$.

5. On peut modifier l'algorithme de la manière suivante.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel positif
Initialisation :	Affecter à u la valeur 1 Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $u \leq 1,999$ Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

6. D'après la question 4. c., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 2 - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc $0 \leq v_n \leq n \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Soit la proposition $T_n : \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On va montrer que T_n est vraie pour tout $n \geq 13$.

En effet, $\left(\frac{2}{3}\right)^{13} \approx 0,0051$ et $\frac{1}{13^2} \approx 0,0059$ donc T_{13} est vraie.

Supposons que T_k est vraie pour un certain $k \geq 13$.

Alors, $\left(\frac{2}{3}\right)^k \leq \frac{1}{k^2}$ donc $\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \leq \frac{2}{3k^2}$. Or,

$$\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{2}{3k^2} = \frac{3k^2 - 2(k+1)^2}{3k^2(k+1)^2} = \frac{3k^2 - 2k^2 - 4k - 2}{3k^2(k+1)^2} = \frac{k^2 - 4k - 2}{3k^2(k+1)^2} = \frac{(k-2)^2 - 6}{3k^2(k+1)^2}$$

et, comme $k \geq 13$, $k - 2 \geq 11$ donc $(k - 2)^2 \geq 121$ donc $\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{2}{3k^2} \geq 0$. Ainsi, on

conclut que $\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \leq \frac{2}{3k^2} \leq \frac{1}{(k+1)^2}$ ce qui démontre que T_{k+1} est vraie.

On conclut donc que, pour tout entier $n \geq 13$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{n^2}$.

Par suite, pour tout entier $n \geq 13$, $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n}$ donc, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, le théorème d'encadrement permet de conclure que (v_n) converge et que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0}$.