

Nom : Prénom :

TS4

lundi 21 novembre 2016

Devoir surveillé n°2

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

EXERCICE 1 (6 points)

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies **au centième**.

Partie A. — Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80% de ses boîtes chez le fournisseur A et 20% chez le fournisseur B. Par ailleurs, 10% des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20% de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

- A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.
3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B. — Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise. On considère la variable aléatoire X qui associe, à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

EXERCICE 2 (6 points). — Un site internet propose un jeu en ligne. On sait que :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n -ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n .

L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Traduire l'énoncé par un arbre pondéré.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.
- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et préciser u_1 .
 - Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.
 - Déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3 (8 points). — On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

- Faire fonctionner cet algorithme si l'on choisit $n = 3$. On détaillera les différentes étapes en arrondissant les valeurs à 10^{-4} près.
- Que permet de calculer cet algorithme ?
- Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées à 10^{-4} près obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n .

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	2,0000

Quelles conjectures peut-on émettre concernant les variations et la limite de (u_n) ?

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$.
- Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) . (On pourra raisonner par récurrence.)
 - Justifier que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
 - En exprimant de deux façons différentes la limite de la suite (u_{n+1}^2) , déterminer ℓ .
- On se propose de retrouver le résultat de la question **3.c.** par une autre méthode.
 - Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 - u_{n+1} = \frac{2(2 - u_n)}{2 + u_{n+1}}$.
 - En déduire, en utilisant aussi la question **2.**, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(2 - u_n).$$

- Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 2 - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
 - En déduire la valeur de ℓ .
- (bonus facile) Modifier l'algorithme de la question **1.** de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.
 - (bonus difficile) Étudier le comportement asymptotique de la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = n(2 - u_n)$.