Corrigé du devoir surveillé n°1

Exercice 1.

1. Comme f est une fonction rationnelle, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2. D'une part, $\lim\limits_{x\to-2} x+1 = -1$ et, d'autre part, $\lim\limits_{x\to-2} 2x+4 = 0$. De plus, si $x < -2$ alors $2x+4 < 0$ et si $x > -2$ alors $2x+4 > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} 2x+4 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} 2x+4 = 0^+$.

Ainsi, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -\infty$.

3. La limite de f en $-\infty$ et $+\infty$ permet de dire que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe de f aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

Les limites de f au voisinage de -2 permettent de dire que la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f.

4. La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout réel $x \neq -2$,

$$f'(x) = \frac{1\times(2x+4)-(x+1)\times 2}{(2x+4)^2} = \frac{2x+4-2x-2}{(2x+4)^2} = \frac{2}{(2x+4)^2} > 0$$

donc la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]-2\,;+\infty[$.

5. On aboutit au tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Variations de f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

Exercice 2.

1. On a $u_1 = \frac{2u_0}{1+u_0} = \frac{2\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ et $u_2 = \frac{2u_1}{1+u_1} = \frac{2\times\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « $u_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$ ».

Comme $\frac{2^0}{1+2^0} = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{2}$, la proposition P_0 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie. Alors, $u_k = \frac{2^k}{1+2^k}$ donc

$$u_{k+1} = \frac{2u_k}{1+u_k} = \frac{2\times\frac{2^k}{1+2^k}}{1+\frac{2^k}{1+2^k}} = \frac{2\times 2^k}{(1+2^k)(1+\frac{2^k}{1+2^k})} = \frac{2^{k+1}}{1+2^k+2^k} = \frac{2^{k+1}}{1+2\times 2^k} = \frac{2^{k+1}}{1+2^{k+1}}$$

donc P_{k+1} est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 2^n \leqslant 1+2^n$ donc, en divisant par $1+2^n > 0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est bornée par 0 et 1}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}} - \frac{2^n}{1+2^n} = \frac{2^{n+1}(1+2^n) - 2^n(1+2^{n+1})}{(1+2^{n+1})(1+2^n)} \\ &= \frac{2^{n+1} + 2^{2n+1} - 2^n - 2^{2n+1}}{(1+2^{n+1})(1+2^n)} = \frac{2 \times 2^n - 2^n}{(1+2^{n+1})(1+2^n)} \\ &= \frac{2^n}{(1+2^{n+1})(1+2^n)} \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geqslant 0$ donc $1 + 2^{n+1} > 0$ et $1 + 2^n > 0$ et ainsi $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. On en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

5. On se propose de retrouver le résultat de la question **2.** d'une autre manière. Pour cela, on admet que (u_n) ne s'annule pas et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\frac{2u_n}{1+u_n}} - 1 = \frac{1+u_n}{2u_n} - 1 \\ &= \frac{1}{2u_n} + \frac{u_n}{2u_n} - 1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{u_n} + \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{u_n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

donc $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{2}}$. De plus, son premier terme est $v_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = 2 - 1$ soit $\boxed{v_0 = 1}$.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^n}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_n} = v_n + 1$ donc $u_n = \dfrac{1}{v_n + 1} = \dfrac{1}{\frac{1}{2^n} + 1}$ soit, en multipliant numérateur et dénominateur par 2^n, $\boxed{u_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}}$.

Exercice 3.

1. On a $v_2 = v_1 \times u_2 = u_1 \times u_2$. Or, $u_1 = \frac{1(1+2)}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$ et $u_2 = \frac{2(2+2)}{(2+1)^2} = \frac{8}{9}$ donc $v_2 = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$. De même, $v_3 = v_2 \times u_3$ avec $u_3 = \frac{3(3+2)}{(3+1)^2} = \frac{15}{16}$ donc $v_3 = \frac{2}{3} \times \frac{15}{16} = \frac{5}{8}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $v_{n+1} = v_n \times u_{n+1} = v_n \times \dfrac{(n+1)(n+1+2)}{(n+1+1)^2} = v_n \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$ i.e. $\boxed{v_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} v_n}$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition P_n : « $v_n = \dfrac{n+2}{2n+2}$ ».

Étant donné que $\frac{1+2}{2\times 1+2} = \frac{3}{4}$ et que $v_1 = u_1 = \frac{3}{4}$, P_1 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_k est vraie. Alors, $v_k = \frac{k+2}{2k+2}$ donc, grâce à la question précédente,

$$v_{k+1} = \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} \times \frac{k+2}{2k+2} = \frac{(k+1)(k+3)(k+2)}{(k+2)^2 \times 2(k+1)} = \frac{k+3}{2(k+2)} = \frac{k+1+2}{2(k+1)+2}$$

donc P_{k+1} est vraie.

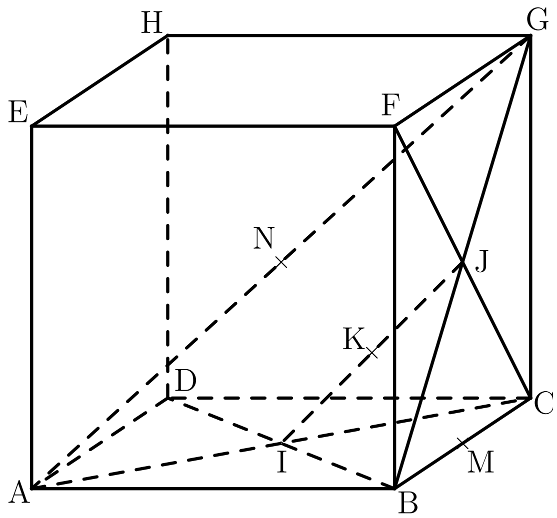
Ainsi, on a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n+2}{2n+2}}$.

4. Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{x+2}{2x+2}$ définie sur $[0\,;+\infty[$. La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{1\times(2x+2)-(x+2)\times 2}{(2x+2)^2} = \frac{2x+2-2x-4}{(2x+2)^2} = \frac{-2}{(2x+2)^2} < 0$$

donc f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = f(n)$ donc la suite $\boxed{(v_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante}}$.

Exercice 4.



1. Dans cette question, on souhaite montrer que K est le milieu de [MN].

a. Comme M et I sont les milieux respectifs de [BC] et [AC], on a $\overrightarrow{\text{MC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BC}}$ et $\overrightarrow{\text{CI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{CA}}$ donc, grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{\text{MI}} = \overrightarrow{\text{MC}} + \overrightarrow{\text{CI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{CA}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{BC}} + \overrightarrow{\text{CA}}\right)$$

i.e. $\boxed{\overrightarrow{\text{MI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BA}}}$.

b. Grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{\text{MI}} + \overrightarrow{\text{MJ}} = \overrightarrow{\text{MK}} + \overrightarrow{\text{KI}} + \overrightarrow{\text{MK}} + \overrightarrow{\text{KJ}} = 2\overrightarrow{\text{MK}}$$

car K est le milieu de [IJ] donc $\overrightarrow{\text{KI}} + \overrightarrow{\text{KJ}} = \overrightarrow{0}$.

c. Grâce à la relation de Chasles,

$$2\overrightarrow{\text{MN}} = \overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{MG}} = \overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{MC}} + \overrightarrow{\text{CG}} = \overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{CG}}$$

car M est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{MC}} = \overrightarrow{0}$.

d. On déduit des questions précédentes que

$$2\overrightarrow{\text{MK}} = \overrightarrow{\text{MI}} + \overrightarrow{\text{MJ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{CG}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{CG}}\right) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{\text{MN}})$$

donc $\overrightarrow{\text{MN}} = 2\overrightarrow{\text{MK}}$ i.e. $\boxed{\text{K est le milieu de [MN]}}$.

2. a. Comme $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{HG}}$, le quadrilatère ABGH est un parallélogramme donc ses diagonales se coupent en leur milieu. Ainsi, N est le milieu de [BH] donc $\boxed{\overrightarrow{\text{BN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BH}}}$.

b. Comme K est le milieu de [MN], $\overrightarrow{\text{KN}} + \overrightarrow{\text{KM}} = \overrightarrow{0}$ donc

$$\overrightarrow{\text{BN}} + \overrightarrow{\text{BM}} = \overrightarrow{\text{BK}} + \overrightarrow{\text{KN}} + \overrightarrow{\text{BK}} + \overrightarrow{\text{KM}} = 2\overrightarrow{\text{BK}}.$$

De plus, M est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{\text{BM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BC}}$ donc

$$\overrightarrow{\text{BK}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{BN}} + \overrightarrow{\text{BM}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BH}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BC}}\right)$$

i.e. $\boxed{\overrightarrow{\text{BK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{BH}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{BC}}}$.

c. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\text{BK}}$, $\overrightarrow{\text{BH}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$ sont coplanaires donc les points B, C, H et K sont coplanaires.

3. Montrons par l'absurde que les droites (AG) et (IJ) sont non coplanaires. En effet, si (AG) et (IJ) étaient coplanaires alors, comme B $\in$ (GJ), les points A, I, G et B seraient coplanaires i.e. B appartiendrait au plan (AIB)=(ABC). C'est absurde pas définition du cube donc $\boxed{\text{(AG) et (IJ) sont non coplanaires}}$.

4. Comme $\overrightarrow{\text{BC}} = \overrightarrow{\text{EH}}$, BCHE est un parallélogramme donc N, qui est le milieu de [BH], est aussi le milieu de [CE] donc N appartient à (BCE). De plus, M appartient à (BC) donc à (BCE) et ainsi (MN) est incluse dans (BCE). En particulier, K appartient à (BCE) donc K est un point commun à (IJ) et (BCE). On en déduit que soit (IJ) est incluse dans (BCE) soit (IJ) et (BCE) sont sécantes en K. Or, si (IJ) était incluse dans (BCE), les points B, C, I et J serait coplanaires i.e. J appartiendrait au plan (BCI))=(ABC), ce qui n'est pas le cas. Ainsi, (IJ) $\cap$ (BCE) = $\{$K$\}$.

5. Comme le point H n'appartient pas au plan (BCI), les points B, C, I et H ne sont pas coplanaires donc les plans (BCH) et (IJM) ne sont pas confondus. De plus, M appartient à ces deux plans donc l'intersection de ceux-ci est une droite passante par M. On a montré que K appartient à (IJ) donc K appartient à (IJM). Dès lors, (MK) est incluse dans (IJM) donc, comme N, K et M sont alignés, N appartient à (IJM). Enfin on a vu que N est le milieu de [BH] donc N appartient à (BCH) et on a également vu que BCHE est un parallélogramme donc (BCE)=(BCH). Ainsi, N appartient aux deux plans (IJM) et (BCE). On conclut donc que (BCE) $\cap$ (IJM) = (MN).