Devoir surveillé n°1

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

Exercice 1 (4 points)**.** On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x+1}{2x+4}$$

définie sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Déterminer les limites à droite et à gauche de f au voisinage de -2.

3. Quelles sont les asymptotes à la courbe de f ?

4. Étudier les variations de f sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$.

5. Dresser le tableau de variation complet de f sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$.

Exercice 2 (6 points)**.** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n}.$$

1. Calculer, sous forme de fractions irréductibles, u_1 et u_2. On détaillera les calculs.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

3. Montrer que la suite (u_n) est bornée par 0 et 1.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^n}{(1+2^{n+1})(1+2^n)}$$

et en déduire les variations de (u_n).

5. On se propose de retrouver le résultat de la question **2.** d'une autre manière. Pour cela, on admet que (u_n) ne s'annule pas et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$.

a. En utilisant seulement la définition de (u_n) donnée au début de l'énoncé, montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n et retrouver le résultat de la question **2.**

Exercice 3 (3 points)**.** On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

et la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $v_1 = u_1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = v_n \times u_{n+1}$.

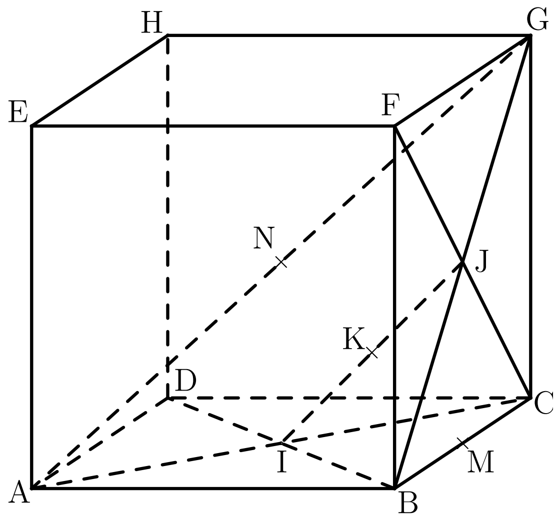
1. Vérifier que $v_2 = \dfrac{2}{3}$ puis calculer v_3 sous forme de fraction irréductible.

2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} v_n$.

3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{n+2}{2n+2}$.

4. Étudier les variations de $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 4 (7 points)**.** On considère un cube ABCDEFGH. On note I le centre de la face ABCD, J le centre de la face BCGF, K le milieu de [IJ], M le milieu de [BC] et N le milieu de [AG].



1. Dans cette question, on souhaite montrer que K est le milieu de [MN].

a. Démontrer que $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

On admet que, de même, $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$.

b. Montrer que $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} = 2\overrightarrow{MK}$.

c. On admet que, de même, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MN}$. En déduire que $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CG}$.

d. Conclure.

2. Dans cette question, on souhaite montrer que les points B, C, K et H sont coplanaires.

a. Justifier que $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$.

b. En utilisant le fait que K est le milieu de [MN], montrer que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

c. Conclure.

3. Étudier la position relative des droites (AG) et (IJ).

4. Déterminer l'intersection du plan (BCE) et de la droite (IJ). (On détaillera sa réponse.)

5. Déterminer l'intersection des plans (BCH) et (IJM). (On détaillera sa réponse.)