

# Corrigé du devoir surveillé n°1 (TS3)

## EXERCICE 1

1. a. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Alors,

$$(z^2 - 6z + 13)(z^2 + 4) = z^4 + 4z^2 - 6z^3 - 24z + 13z^2 + 52 = z^4 - 6z^3 + 17z^2 - 24z + 52$$

$$\text{donc } \boxed{P(z) = (z^2 - 6z + 13)(z^2 + 4)}.$$

b. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 6z + 13 = 0 \text{ ou } z^2 + 4 = 0$$

- Le discriminant de  $z^2 - 6z + 13$  est  $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 < 0$  donc ce trinôme a deux racines complexes conjuguées :

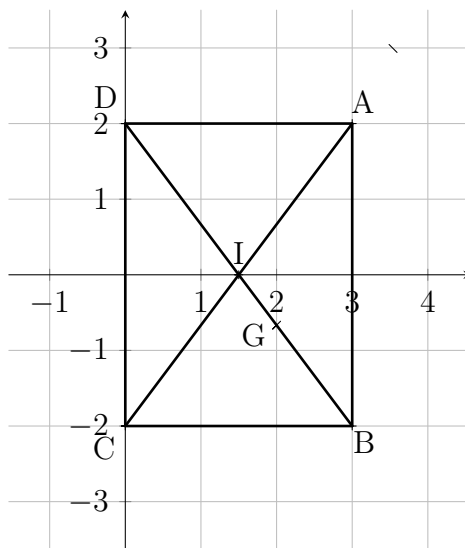
$$z_1 = \frac{-(-6) - i\sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 3 + 2i.$$

- Par ailleurs, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} z^2 + 4 = 0 &\Leftrightarrow z^2 - (2i)^2 = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z + 2i) = 0 \\ &\Leftrightarrow z - 2i \text{ ou } z + 2i = 0 \Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -2i. \end{aligned}$$

On conclut donc que l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $P(z) = 0$  est  $\{3 + 2i, 3 - 2i, 2i, -2i\}$ .

2. a.



- b. On a  $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 - 2i - (3 + 2i) = -4i$  et  $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -2i - 2i = -4i$   
donc  $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ . Dès lors,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  donc  $\boxed{\text{ABCD est un parallélogramme}}$ .

3. a. Voir ci-dessus.

b. Notons I le milieu de [AC]. Alors,

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{3 + 2i + (-2i)}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } z_{\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}} = \frac{2}{3}z_{\overrightarrow{BI}} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} - (3 - 2i)\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2} + 2i\right) = -1 + \frac{4}{3}i.$$

$$\text{Or, } z_{\overrightarrow{BG}} = 2 - \frac{2}{3}i - (3 - 2i) = -1 + \frac{4}{3}i \text{ donc } z_{\overrightarrow{BG}} = z_{\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}} \text{ i.e. } \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}.$$

On en déduit que G est le centre de gravité du triangle ABC.

c. *Première méthode.* Comme G est le centre de gravité de ABC,  $G \in (BI)$ . Or, ABCD est un parallélogramme donc ses diagonales se coupent en I. Ainsi,  $(BI) = (BD)$  et donc  $G \in (BD)$ . Autrement dit, les points B, G et D sont alignés.

*Seconde méthode.* On calcule les affixes des vecteurs  $\overrightarrow{BG}$  et  $\overrightarrow{BD}$  :

$$z_{\overrightarrow{BG}} = 2 - \frac{2}{3}i - (3 - 2i) = -1 + \frac{4}{3}i \text{ et } z_{\overrightarrow{BD}} = 2i - (3 - 2i) = -3 + 4i$$

et on constate que  $z_{\overrightarrow{BD}} = 3z_{\overrightarrow{BG}}$  donc  $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BG}$ . Ainsi, les vecteurs  $\overrightarrow{BD}$  et  $\overrightarrow{BG}$  sont colinéaires donc les points B, G et D sont alignés.

## EXERCICE 2

1. On écrit

$$\begin{aligned} Z &= \frac{x + iy}{x + iy - 2i} = \frac{x + iy}{x + i(y - 2)} = \frac{(x + iy)(x - i(y - 2))}{x^2 + (y - 2)^2} \\ &= \frac{x^2 - ix(y - 2) + iyx + y(y - 2)}{x^2 + (y - 2)^2} = \frac{x^2 + y(y - 2) + i[-x(y - 2) + yx]}{x^2 + (y - 2)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2y}{x^2 + (y - 2)^2} + i \frac{-xy + 2x + yx}{x^2 + (y - 2)^2} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{Z = \frac{x^2 + y^2 - 2y}{x^2 + (y - 2)^2} + i \frac{2x}{x^2 + (y - 2)^2}}.$$

2. a. On a

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + (y - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x^2 + (y - 2)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x, y) \neq (0, 2) \end{cases}$$

Ainsi,  $\mathcal{E}$  est l'axe des ordonnées privé du point A(0, 2).

b. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 - 2y}{x^2 + (y - 2)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + (y - 2)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 1^2 \\ (x, y) \neq (0, 2) \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{F}$  est le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega(0, 1)$  et de rayon  $R = 1$  privé du point A(0, 2).

### EXERCICE 3

#### Partie A. — Conjectures

1. On a  $u_1 = \frac{16}{8-1}$  i.e.  $u_1 = \frac{16}{7}$  et  $u_2 = \frac{16}{8-\frac{16}{7}} = \frac{16}{\frac{56-16}{7}} = 16 \times \frac{7}{40}$  i.e.  $u_2 = \frac{14}{5}$ .

2.

| $n$   | 0 | 1    | 2   | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    |
|-------|---|------|-----|------|------|------|------|------|
| $u_n$ | 1 | 2,29 | 2,8 | 3,08 | 3,25 | 3,37 | 3,45 | 3,52 |

3. On peut conjecturer que  $(u_n)$  est croissante.

4. Si  $(u_n)$  est effectivement croissante, elle est minorée par  $u_0 = 1$ . Par ailleurs, on peut conjecturer qu'elle est majorée.

#### Partie B. — Un algorithme

$$\begin{array}{l} u \leftarrow 1 \\ \text{Pour } n \text{ allant de } 0 \text{ à } 7 \\ \quad u \leftarrow \frac{16}{8-u} \\ \text{Fin Pour} \end{array}$$

#### Partie C. — Preuve des conjectures

1. Considérons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la proposition  $\mathcal{P}_n$  : «  $0 < u_n < 4$  ».

Puisque  $u_0 = 1$ ,  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

Supposons que  $\mathcal{P}_k$  est vraie pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ .

Alors,  $0 < u_k < 4$  donc  $0 > -u_k > -4$  donc  $8 > 8 - u_k > 4$ . Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ , on en déduit que  $\frac{1}{8} < \frac{1}{8-u_k} < \frac{1}{4}$  et donc, comme  $16 > 0$ ,  $\frac{16}{8} < \frac{16}{8-u_k} < \frac{16}{4}$  i.e.  $2 < u_{k+1} < 4$ . Ainsi,  $0 < u_{k+1} < 4$  donc  $\mathcal{P}_{k+1}$  est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 4$ .

2. a. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{16}{8 - u_n} - u_n = \frac{16 - u_n(8 - u_n)}{8 - u_n} = \frac{16 - 8u_n + u_n^2}{8 - u_n} = \frac{u_n^2 - 2 \times 4 \times u_n + 4^2}{8 - u_n}$$

i.e.  $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 4)^2}{8 - u_n}$ .

b. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, d'après la question C.1.,  $u_n < 4$  donc  $8 - u_n > 8 - 4 = 4$ . Ainsi,  $8 - u_n > 0$ . De plus,  $(u_n - 4)^2 \geq 0$  donc  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

On conclut que  $(u_n)$  est croissante.

#### Partie D. — Expression explicite de $(u_n)$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 4} - \frac{1}{u_n - 4} = \frac{1}{\frac{16}{8-u_n} - 4} - \frac{1}{u_n - 4} \\ &= \frac{8 - u_n}{16 - 4(8 - u_n)} - \frac{1}{u_n - 4} = \frac{8 - u_n}{4u_n - 16} - \frac{4}{4(u_n - 4)} \\ &= \frac{8 - u_n - 4}{4(u_n - 4)} = \frac{-(u_n - 4)}{4(u_n - 4)} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(v_n)$  est arithmétique de raison  $-\frac{1}{4}$  et son premier terme est  $v_0 = \frac{1}{u_0 - 4} = -\frac{1}{3}$ .

**2.** On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = -\frac{1}{3} - \frac{n}{4} = -\frac{3n+4}{12}$ .

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n - 4 = \frac{1}{v_n}$  donc

$$u_n = 4 + \frac{1}{v_n} = 4 - \frac{12}{3n+4} = \frac{4(3n+4) - 12}{3n+4} = \frac{12n+16-12}{3n+4}$$

i.e.  $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{12n+4}{3n+4}}.$