

Devoir surveillé n°1

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

EXERCICE 1

(6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On pose, pour tout complexe z , $P(z) = z^4 - 6z^3 + 17z^2 - 24z + 52$.
 - a. Démontrer que, pour tout complexe z , $P(z) = (z^2 - 6z + 13)(z^2 + 4)$.
 - b. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$ d'inconnue z .
2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i$, $z_B = 3 - 2i$, $z_C = -2i$ et $z_D = 2i$.
 - a. Faire une figure et placer les points A, B, C et D.
 - b. Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
3. Soit G le point d'affixe $z_G = 2 - \frac{2}{3}i$.
 - a. Placer G sur la figure précédente.
 - b. Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC.
 - c. Les points B, G et D sont-ils alignés ?

EXERCICE 2

(4 points)

Pour tout nombre complexe $z \neq 2i$, on pose $Z = \frac{z}{z - 2i}$. Si z est un complexe différent de $2i$, on écrit $z = x + iy$ sous forme algébrique.

1. Montrer que la forme algébrique de Z est $Z = \frac{x^2 + y^2 - 2y}{x^2 + (y - 2)^2} + i \frac{2x}{x^2 + (y - 2)^2}$.
2.
 - a. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 2i$ tels que Z est réel. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.
 - b. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 2i$ tels que Z est imaginaire pur. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$.

EXERCICE 3**(10 points)**

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{16}{8 - u_n}$.

Partie A. — Conjectures

1. Calculer à la main u_1 et u_2 . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
2. Recopier et compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	1							

3. Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
4. La suite (u_n) semble-t-elle bornée ?

Partie B. — Un algorithme

On considère l'algorithme incomplet suivant.

$u \leftarrow 1$ Pour n allant de ... $u \leftarrow \dots$ Fin Pour
--

Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension afin que cet algorithme calcule la valeur de u_8 .

Partie C. — Preuve des conjectures

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 4$.
2. a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 4)^2}{8 - u_n}$.
 b. La suite (u_n) est-elle monotone ?

Partie D. — Expression explicite de (u_n)

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geq 0$, $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison ainsi que son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = \frac{12n + 4}{3n + 4}$.