

Corrigé du devoir surveillé n°1 (TS1)

EXERCICE 1

1. a. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$(z^2 - 6z + 13)(z^2 + 4) = z^4 + 4z^2 - 6z^3 - 24z + 13z^2 + 52 = z^4 - 6z^3 + 17z^2 - 24z + 52$$

$$\text{donc } \boxed{P(z) = (z^2 - 6z + 13)(z^2 + 4)}.$$

b. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 6z + 13 = 0 \text{ ou } z^2 + 4 = 0$$

- Le discriminant de $z^2 - 6z + 13$ est $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 < 0$ donc ce trinôme a deux racines complexes conjuguées :

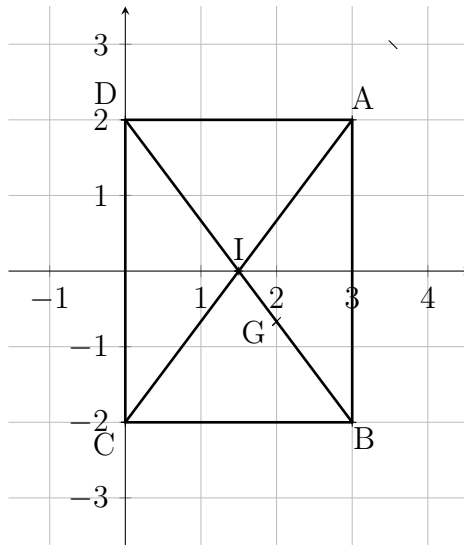
$$z_1 = \frac{-(-6) - i\sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 3 + 2i.$$

- Par ailleurs, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} z^2 + 4 = 0 &\Leftrightarrow z^2 - (2i)^2 = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z + 2i) = 0 \\ &\Leftrightarrow z - 2i \text{ ou } z + 2i = 0 \Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -2i. \end{aligned}$$

On conclut donc que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$ est $\{3 + 2i, 3 - 2i, 2i, -2i\}$.

2. a.



- b. On a $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 - 2i - (3 + 2i) = -4i$ et $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -2i - 2i = -4i$ donc $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$. Dès lors, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\boxed{\text{ABCD est un parallélogramme}}$.

3. a. Voir ci-dessus.

b. Notons I le milieu de [AC]. Alors,

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{3 + 2i + (-2i)}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } z_{\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}} = \frac{2}{3}z_{\overrightarrow{BI}} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} - (3 - 2i)\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2} + 2i\right) = -1 + \frac{4}{3}i.$$

$$\text{Or, } z_{\overrightarrow{BG}} = 2 - \frac{2}{3}i - (3 - 2i) = -1 + \frac{4}{3}i \text{ donc } z_{\overrightarrow{BG}} = z_{\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}} \text{ i.e. } \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}.$$

On en déduit que $\boxed{\text{G est le centre de gravité du triangle ABC}}$.

c. *Première méthode.* Comme G est le centre de gravité de ABC, $G \in (BI)$. Or, ABCD est un parallélogramme donc ses diagonales se coupent en I. Ainsi, $(BI) = (BD)$ et donc $G \in (BD)$. Autrement dit, les points B, G et D sont alignés.

Seconde méthode. On calcule les affixes des vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BD}$:

$$z_{\overrightarrow{BG}} = 2 - \frac{2}{3}i - (3 - 2i) = -1 + \frac{4}{3}i \text{ et } z_{\overrightarrow{BD}} = 2i - (3 - 2i) = -3 + 4i$$

et on constate que $z_{\overrightarrow{BD}} = 3z_{\overrightarrow{BG}}$ donc $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BG}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires donc les points B, G et D sont alignés.

EXERCICE 2

1. On écrit

$$\begin{aligned} Z &= \frac{x + iy}{x + iy - 2i} = \frac{x + iy}{x + i(y - 2)} = \frac{(x + iy)(x - i(y - 2))}{x^2 + (y - 2)^2} \\ &= \frac{x^2 - ix(y - 2) + iyx + y(y - 2)}{x^2 + (y - 2)^2} = \frac{x^2 + y(y - 2) + i[-x(y - 2) + yx]}{x^2 + (y - 2)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2y}{x^2 + (y - 2)^2} + i \frac{-xy + 2x + yx}{x^2 + (y - 2)^2} \end{aligned}$$

donc

$$Z = \frac{x^2 + y^2 - 2y}{x^2 + (y - 2)^2} + i \frac{2x}{x^2 + (y - 2)^2}.$$

2. a. On a

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + (y - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x^2 + (y - 2)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x, y) \neq (0, 2) \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{E}$ est l'axe des ordonnées privé du point A(0, 2).

b. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 - 2y}{x^2 + (y - 2)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + (y - 2)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 1^2 \\ (x, y) \neq (0, 2) \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ est le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(0, 1)$ et de rayon $R = 1$ privé du point A(0, 2).

EXERCICE 3

Partie A. — Conjectures

1. On a $u_1 = \frac{(0+1)u_0+1}{2(0+2)} = \frac{2+1}{4}$ i.e. $u_1 = \frac{3}{4}$ et $u_2 = \frac{(1+1)\frac{3}{4}+1}{2(1+2)} = \frac{\frac{3}{2}+1}{6} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{6}$ i.e. $u_2 = \frac{5}{12}$.

2.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	2	0,75	0,42	0,28	0,21	0,17	0,15	0,13

3. On peut conjecturer que (u_n) est décroissante.

4. Si (u_n) est effectivement décroissante, elle est majorée par $u_0 = 2$. Par ailleurs, la suite semble soit toujours positive, on peut conjecturer qu'elle est également minorée.

Partie B. — Un algorithme

```

n ← 0
u ← 2
Tant que n < 8
    u ←  $\frac{(n+1)u+1}{2(n+2)}$ 
    n ← n + 1
Fin Tant que
    
```

Partie C. — Étude de (u_n)

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}_n$: « $0 \leq u_n \leq 2$ ».

Puisque $u_0 = 2$, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $0 \leq u_k \leq 2$ donc, comme $k+1 \geq 0$, $0 \leq (k+1)u_k \leq 2(k+1)$ et ainsi $1 \leq (k+1)u_k + 1 \leq 2(k+1) + 1 = 2k+3$. Or, $2(k+2) > 0$ donc $\frac{1}{2(k+2)} \leq \frac{(k+1)u_k+1}{2(k+2)} \leq \frac{2k+3}{2(k+2)}$.

De plus, comme $k \geq 0$, $\frac{1}{2(k+2)} \geq 0$ et $\frac{2k+3}{2(k+2)} = \frac{2k+3}{2k+4} \leq 1$ car $0 < 2k+3 \leq 2k+4$. Ainsi, $0 \leq u_{k+1} \leq 1$ et donc, à plus forte raison, $0 \leq u_{k+1} \leq 2$. Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (n+2)u_{n+1} - 1 = (n+2)\frac{(n+1)u_n+1}{2(n+2)} - 1 \\ &= \frac{(n+1)u_n+1}{2} - \frac{2}{2} = \frac{(n+1)u_n-1}{2} = \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et son premier terme est $v_0 = (0+1)u_0 - 1 = 1$.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 \times (\frac{1}{2})^n = (0,5)^n$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)u_n = v_n + 1$ donc, comme $n+1 > 0$, $u_n = \frac{v_n+1}{n+1}$ i.e.

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n+1}.$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{1 + (0,5)^{n+1}}{n+2} - \frac{1 + (0,5)^n}{n+1} \\
 &= \frac{(n+1)(1 + (0,5)^{n+1}) - (n+2)(1 + (0,5)^n)}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{(n+1)(1 + (0,5)^{n+1}) - (n+2)(1 + 2 \times (0,5)^{n+1})}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{n + n(0,5)^{n+1} + 1 + (0,5)^{n+1} - n - 2n(0,5)^{n+1} - 2 - 4(0,5)^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{-1 + (n+1 - 2n - 4)}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{-1 - (n+3)}{(n+1)(n+2)}
 \end{aligned}$$

i.e.
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (n+3)(0,5)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+1 > 0$, $n+2 > 0$, $n+3 > 0$ et $(0,5)^{n+1} > 0$ donc $\frac{1 + (n+3)(0,5)^{n+1}}{(n+1)(n+2)} > 0$. Ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$ et on conclut que (u_n) est décroissante.