

Correction du devoir surveillé n°1

EXERCICE 1

Partie A

1. Par définition,

$$f(z_D) = (1+i)^2 - 4(1+i) + 5 = 2i - 4 - 4i + 5$$

donc l'affixe de D' est $\boxed{f(z_D) = 1 - 2i}$.

2. Chercher les points M tels que $M = M'$ revient à chercher les affixes z telles que $z = f(z)$.
Or,

$$z = f(z) \Leftrightarrow z = z^2 - 4z + 5 \Leftrightarrow z^2 - 5z + 5 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $z^2 - 5z + 5$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 5 > 0$ donc l'équation $z^2 - 5z + 5 = 0$ admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{les points invariants sont les points d'affixes } \frac{5+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

3. a. Par définition,

$$f(z) = (x+iy)^2 - 4(x+iy) + 5 = x^2 + 2ixy - y^2 - 4x - 4iy + 5 = x^2 - y^2 - 4x + 5 + i(2xy - 4y)$$

$$\text{donc } \boxed{\operatorname{Re}(f(z)) = x^2 - y^2 - 4x + 5 \text{ et } \operatorname{Im}(f(z)) = 2xy - 4y}.$$

- b. On a

$$M(z) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow 2xy - 4y = 0 \Leftrightarrow 2y(x - 2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = 2.$$

On conclut donc que $\mathcal{E}$ est la réunion de la droite d'équation $y = 0$ (i.e. l'axe des abscisses) et de la droite d'équation $x = 2$.

Partie B

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\begin{aligned} (z-4)f(z) &= (z-4)(z^2 - 4z + 5) \\ &= z^3 - 4z^2 + 5z - 4z^2 + 16z - 20 \\ &= z^3 - 8z^2 + 21z - 20 \\ &= P(z) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien, $\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-4)f(z)}$.

2. On utilisant la question précédente :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-4)(z^2 - 4z + 5) = 0 \Leftrightarrow z-4 = 0 \text{ ou } z^2 - 4z + 5 = 0.$$

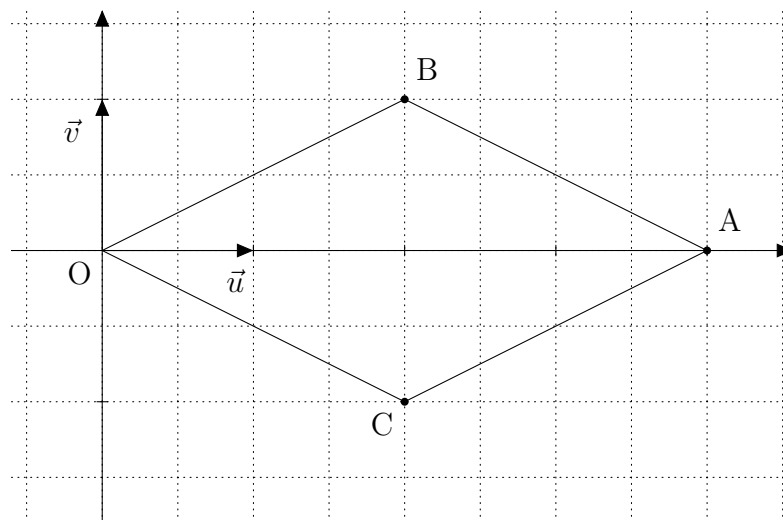
Or, d'une part, $z-4 = 0$ si et seulement si $z = 4$. D'autre part, le discriminant de $z^2 - 4z + 5$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 < 0$ donc l'équation $z^2 - 4z + 5 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées qui sont

$$z_1 = \frac{-(-4) - i\sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = 2 + i.$$

On conclut que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } P(z) = 0 \text{ est } \{4 ; 2 - i ; 2 + i\}}$.

Partie C

1.



2. Calculons les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{CA}$:

$$z_{\overrightarrow{OB}} = z_B = 2 + i \quad \text{et} \quad z_{\overrightarrow{CA}} = z_A - z_C = 4 - (2 - i) = 2 + i.$$

Ainsi, $z_{\overrightarrow{OB}} = z_{\overrightarrow{CA}}$ donc $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$ ce qui démontre que OBAC est un parallélogramme.

EXERCICE 2

1. a. Les premières valeurs de la suite permettent seulement de faire une conjecture mais sûrement pas d'affirmer que la suite est décroissante.
- b. Voici les 11 premières valeurs de (u_n) arrondies au centième.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	16	7	3,5	2,75	3,38	4,69	6,34	8,17	10,09	12,04	14,02

c. On peut conjecturer que (u_n) est croissante à partir du rang 3.

d. Soit la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq u_{n+1}$ » pour $n \in \mathbb{N}$.

D'après le tableau précédent, la proposition $\mathcal{P}(3)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain entier $k \geq 3$.

Alors, $u_k \leq u_{k+1}$ donc, comme $\frac{1}{2} > 0$, $\frac{1}{2}u_k \leq \frac{1}{2}u_{k+1}$ et donc $\frac{1}{2}u_k + k - 1 \leq \frac{1}{2}u_{k+1} + k - 1$.

Or, $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + k - 1$ et $u_{k+2} = \frac{1}{2}u_{k+1} + (k+1) - 1 = \frac{1}{2}u_{k+1} + k$ donc $u_{k+1} \leq u_{k+2} - 1$ et *a fortiori* $u_{k+1} \leq u_{k+2}$. Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie et on a montré par récurrence que

(u_n) est croissante à partir du rang 3.

2. a.

	K	U
Initialisation		16
Étape 1	1	8
Étape 2	2	5
Étape 3	3	4,5
Sortie		4,5

- b. Il y a un problème de décalage d'indice. On peut soit changer le « Pour K allant de 1 à N » en « Pour K allant de 0 à N-1 » soit changer le « U prend la valeur $\frac{1}{2}U + K - 1$ » en « U prend la valeur $\frac{1}{2}U + K - 2$ ».
3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 6 = \frac{1}{2}u_n + n - 1 - 2n + 4 = \frac{1}{2}u_n - n + 3 = \frac{1}{2}(u_n - 2n + 6) = \frac{1}{2}v_n$$

donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

- b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Or, $v_0 = u_0 - 2 \times 0 + 6 = 16 + 6 = 22$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 22 \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Étant donné que, pour tout

$$n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 2n - 6, \text{ il s'ensuit que, } \boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = 22 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6}.$$

4. a. $S_0 = u_0 = 16$, $S_1 = u_0 + u_1 = 23$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = 26,5$ et $S_4 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 29,25$.
- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$. Or, pour $n \geq 3$, (u_n) est croissante donc minorée par $u_3 = 2,75$ et le tableau de l'énoncé assure que, pour tout $n \in \{0, 1, 2\}$, $u_n \geq 2,75$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2,75$ et donc $u_n \geq 0$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n \geq 0$ donc $\boxed{(S_n) \text{ est croissante}}$.
- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \left[22 \left(\frac{1}{2}\right)^k + 2k - 6 \right] = \sum_{k=0}^n 22 \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^n 2k - 6.$$

Ainsi, on reconnaît deux sommes : la première est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique et la seconde est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique. Il s'ensuit que

$$S_n = 22 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + (n+1) \frac{-6 + 2n - 6}{2} = 22 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} + (n+1)(n-6)$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, S_n = 44 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] + (n+1)(n-6)}.$$