

Devoir surveillé n°1

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

EXERCICE 1

(8 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout nombre complexe z , on pose

$$f(z) = z^2 - 4z + 5.$$

Partie A. — Si M est un point du plan complexe d'affixe z , on note M' le point du plan d'affixe $f(z)$. On dira alors que M' est l'image de M .

1. Soit D le point d'affixe $1 + i$. Déterminer l'affixe du point D' , image du point D . (On détaillera les calculs.)
2. Déterminer les points invariants c'est-à-dire les points M tels que $M' = M$.
3. Soit z un nombre complexe. On écrit z sous forme algébrique $z = x + iy$ avec x et y réels.
 - a. Déterminer, en fonction de x et y , la forme algébrique de $f(z)$.
 - b. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel est la réunion de deux droites que l'on précisera.

Partie B. — Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = z^3 - 8z^2 + 21z - 20$.

1.
 - a. Vérifier que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - 4)f(z)$.
 - b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Partie C. — On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 4$, $z_B = 2 + i$ et $z_C = 2 - i$.

1. Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, placer les points A , B et C en prenant comme unité graphique 2 cm ou 2 grands carreaux.
2. Démontrer que le quadrilatère $OBAC$ est un parallélogramme.

EXERCICE 2

(12 points)

On note (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 16$ et, pour tout entier naturel n , par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1.$$

1. a. À l'aide d'une calculatrice, on a déterminé les premières valeurs de la suite (u_n) qui sont rassemblées dans le tableau suivant.

n	0	1	2	3
u_n	16	7	3,5	2,75

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ?

- b. Calculer (à la main ou à l'aide d'une calculatrice) les termes suivants de la suite jusqu'au rang $n = 10$. Rassembler les résultats, arrondis au centième, dans un tableau. (On ne demande pas de faire apparaître le détail des calculs sur la copie.)
- c. Quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variation de (u_n) à partir du rang 3 ?
- d. Démontrer cette conjecture par récurrence.
2. On considère l'algorithme suivant :

Variables	:	N est un entier naturel U est un réel K est un entier naturel
Entrée	:	N
Initialisation	:	U prend la valeur 16
Traitement	:	Pour K allant de 1 à N U prend la valeur $\frac{1}{2}U + K - 1$ Fin Pour
Sortie	:	Afficher U

- a. Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 3$. On présentera les étapes sous forme d'un tableau faisant apparaître les valeurs successives de K et de U. (Ces valeurs seront données sous forme décimale exacte.)
- b. Expliquer comment modifier cet algorithme afin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il affiche en sortie la valeur de u_n lorsqu'on le fait fonctionner avec, en entrée, $N = n$.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 2n + 6$.
- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
- b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 22 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2n - 6.$$

4. On considère la suite (S_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
- a. Calculer S_0 , S_1 , S_2 et S_3 sous forme décimale exacte.
- b. Étudier les variations de la suite (S_n) .
- c. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de S_n en fonction de n .