

Correction du devoir surveillé n°1

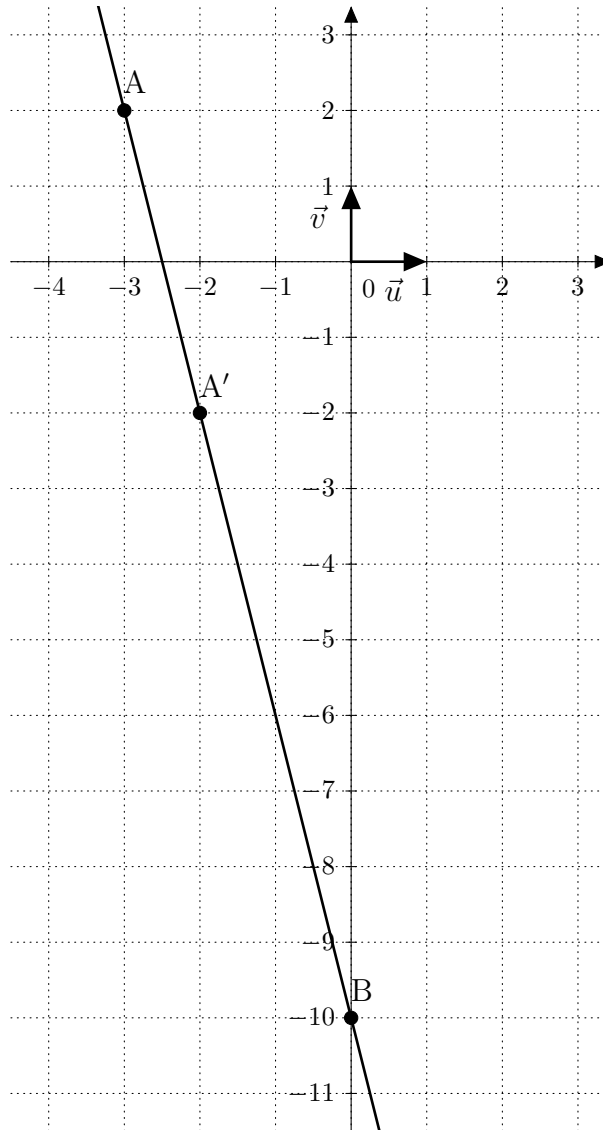
EXERCICE 1

1. a. Par définition,

$$f(z_A) = (-3+2i)^2 + 5(-3+2i) + 8 = 9 - 12i + 4i^2 - 15 + 10i + 8 = 9 - 12i - 4 - 15 + 10i + 8$$

donc $f(z_A) = -2 - 2i$.

b.



c. L'afixe de $\overrightarrow{AA'}$ est $z_{\overrightarrow{AA'}} = f(z_A) - z_A = -2 - 2i - (-3 + 2i) = 1 - 4i$ et l'afixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -10i - (-3 + 2i) = 3 - 12i$. Ainsi, $z_{\overrightarrow{AB}} = 3z_{\overrightarrow{AA'}}$ donc $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AA'}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires et donc les points A, A' et B sont alignés.

2. a. Si $z \in \mathbb{R}$ alors $z^2 \in \mathbb{R}$ donc $z^2 + 5z + 8 \in \mathbb{R}$ i.e. $f(z) \in \mathbb{R}$. Ainsi, l'affirmation 1 est vraie.

- b. Si $z = i$ alors $f(z) = i^2 + 5i + 8 = 7 + 5i$ n'est pas un imaginaire pur. Ainsi, l'affirmation 2 est fausse.
3. Chercher les points M tels que $M = M'$ revient à chercher les affixes z telles que $z = f(z)$. Or,

$$z = f(z) \Leftrightarrow z = z^2 + 5z + 8 \Leftrightarrow z^2 + 4z + 8 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $z^2 + 4z + 8$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 8 = -16 < 0$ donc l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-4 - i\sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-4 - 4i}{2} = -2 - 2i \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = -2 + 2i.$$

Ainsi, les points invariants sont les points A(-2 - 2i) et B(-2 + 2i).

4. Par définition,

$$f(z) = (x + iy)^2 + 5(x + iy) + 8 = x^2 + 2ixy - y^2 + 5x + 5iy + 8 = x^2 - y^2 + 5x + 8 + i(2xy + 5y)$$

donc $\text{Re}(f(z)) = x^2 - y^2 + 5x + 8$ et $\text{Im}(f(z)) = 2xy + 5y$.

5. a. On a

$$M(z) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \text{Im}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow 2xy + 5y = 0 \Leftrightarrow y(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -\frac{5}{2}.$$

On conclut donc que $\mathcal{E}$ est la réunion de la droite d'équation $y = 0$ (i.e. l'axe des abscisses) et de la droite d'équation $x = -\frac{5}{2}$.

- b. La réciproque de l'affirmation 1 est fausse puisque si $z = -\frac{5}{2} + i$ alors $M(z) \in \mathcal{E}$ donc $f(z) \in \mathbb{R}$ mais $z \notin \mathbb{R}$.

EXERCICE 2

1. a. $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 = \frac{7}{3}$ soit $u_1 \approx 2,33$.
 $u_2 = \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} + \frac{1}{3} \times 1 + 1 = \frac{26}{9}$ soit $u_2 \approx 2,89$.
 $u_3 = \frac{2}{3} \times \frac{26}{9} + \frac{1}{3} \times 2 + 1 = \frac{97}{27}$ soit $u_3 \approx 3,59$.
 $u_4 = \frac{2}{3} \times \frac{97}{27} + \frac{1}{3} \times 3 + 1 = \frac{356}{81}$ soit $u_3 \approx 4,40$.

- b. On peut conjecturer que (u_n) est croissante.

2. a. Soit la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq n + 3$ » fg.

$u_0 = 2 \leq 0 + 3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

On doit montrer que $u_{k+1} \leq (k+1) + 3$ i.e. que $u_{k+1} \leq k+4$. Or, on sait que $u_k \leq k+3$ donc, comme $\frac{2}{3} > 0$, $\frac{2}{3}u_k \leq \frac{2}{3}(k+3)$ et ainsi $\frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1 \leq \frac{2}{3}(k+3) + \frac{1}{3}k + 1$ i.e. $u_{k+1} \leq k+3$. Comme $k+3 \leq k+4$, on en déduit que $u_{k+1} \leq k+4$. Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie et on a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n + 3$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{3}{3} = \frac{1}{3}(-u_n + n + 3)$$

$$\text{soit } \boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)}.$$

c. D'après 2.a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + 3 - u_n \geq 0$ donc, d'après 2.b, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ce qui démontre que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n.$$

On conclut donc que (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$. On conclut que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n + n}.$$

c. Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc, par somme, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$.

d. Comme (u_n) est croissante, elle est minorée par son premier terme $u_0 = 2$. De plus, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, (u_n) n'est pas majorée.

4. a.

	K	U	S
Initialisation		2	2
Etape 1	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{13}{3}$
Etape 2	1	$\frac{26}{9}$	$\frac{65}{9}$
Etape 3	2	$\frac{97}{27}$	$\frac{292}{27}$

Pour la valeur $N=3$ en entrée, on obtient la valeur $S = \frac{292}{27}$ en sortie.

b. Les valeurs successives de U correspondent aux valeurs de la suite (u_n) et S_n représente donc la somme de termes de la suite de u_0 jusqu'à u_n . Autrement dit,

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^n u_k}.$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \left[2 \left(\frac{2}{3}\right)^k + k \right] = \sum_{k=0}^n 2 \left(\frac{2}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^n k.$$

Ainsi, on reconnaît deux sommes : la première est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique et la seconde est la somme des $n+1$ premiers entiers naturels. Il s'ensuit que

$$S_n = 2 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{n(n+1)}{2} = 2 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} + \frac{n(n+1)}{2} = 6 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right] + \frac{n(n+1)}{2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, S_n = 6 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right] + \frac{n^2 + n}{2}}.$