

Devoir surveillé n°1

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Tout document est interdit.

EXERCICE 1

(8 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout nombre complexe z , on pose

$$f(z) = z^2 + 5z + 8.$$

Si M est un point du plan complexe d'affixe z , le point M' d'affixe $f(z)$ est appelé l'image de M .

1. Soit A le point d'affixe $z_A = -3 + 2i$ et B le point d'affixe $z_B = -10i$.
 - a. Déterminer l'affixe du point A' , image du point A . (On détaillera les calculs.)
 - b. Placer les points A , A' et B dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ en prenant comme unité graphique 1 cm ou 1 grand carreau.
 - c. Démontrer que les points A , A' et B sont alignés.
2. Les affirmations suivantes sont-elles vraie ou fausse ? On justifiera sa réponse.
 - a. Affirmation 1 : « pour tout complexe z , si z est réel alors $f(z)$ est réel ».
 - b. Affirmation 2 : « pour tout complexe z , si z est imaginaire pur alors $f(z)$ est imaginaire pur ».
3. Déterminer les points invariants c'est-à-dire les points M tels que $M = M'$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On écrit z sous forme algébrique $z = x + iy$ avec x et y réels.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et y .
5.
 - a. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que M' soit sur l'axe réel est la réunion de deux droites que l'on précisera.
 - b. La réciproque de l'affirmation 1 (question 2.a.) est-elle vraie ?

EXERCICE 2**(12 points)**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . Pour chaque valeur, on donnera le résultat exact sous forme d'une fraction irréductible puis une valeur approchée à 10^{-2} près.
- b.** Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq n + 3$.
- b.** Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

- c.** En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$.
 - a.** Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
 - b.** En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^n + n.$$

- c.** Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
- d.** La suite (u_n) est-elle minorée ? Est-elle majorée ?
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	:	N est un entier naturel U est un réel S est un réel K est un entier naturel
Entrée	:	N
Initialisation	:	U prend la valeur 2 S prend la valeur 2
Traitement	:	Pour K allant de 0 à N-1 $\left \begin{array}{l} \text{U prend la valeur } \frac{2}{3}U + \frac{1}{3}K + 1 \\ \text{S prend la valeur } S + U \end{array} \right.$
		Fin Pour
Sortie	:	Afficher S

- a.** Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 3$. On présentera les étapes sous forme d'un tableau faisant apparaître les valeurs successives de K, de U et de S. (Ces valeurs seront données sous forme de fractions irréductibles.)
- b.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On fait fonctionner l'algorithme pour la valeur $N = n$ en entrée et on note S_n le nombre obtenu en sortie. Que représente S_n pour la suite (u_n) ? (On ne demande pas de justification.)
- c.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression S_n en fonction de n .