

## Devoir à la maison n°9

À rendre le lundi 26 avril 2021

**Ce devoir doit être déposé dans mon casier numérique sur l'ENT  
sous la forme d'un seul fichier pdf**

**Exercice 1.** On considère la fonction  $f : x \mapsto 2 \sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - 3x$  définie sur  $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ .

1. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $I$  et calculer, pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x)$ .
2. On considère la fonction  $P : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 1$  définie sur  $\mathbb{R}$ .
  - a. Vérifier que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = (x - 1)^2(2x + 1)$ .
  - b. En déduire, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , le signe de  $P(x)$  en fonction de  $x$ .
3. a. Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{P(\cos(x))}{\cos^2(x)}$ .
  - b. Étudier les variations de  $f$  sur  $I$ .
  - c. Conclure que, pour tout  $x \in I$ ,  $2 \sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \geq 3x$ .

**Exercice 2.**

1. On note  $f$  la fonction définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  par  $f(x) = x - \sin x$ .
  - a. Étudier les variations de  $f$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
  - b. En déduire que, pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\sin x \leq x$  et que, de plus, il n'y a égalité que pour  $x = 0$ .
2. On s'intéresse à la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{\pi}{2}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ .
  - a. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}$ .
  - b. En déduire, en utilisant aussi les résultats de la question 1., que  $(u_n)$  est décroissante.
  - c. Montrer que  $(u_n)$  converge vers une limite que l'on déterminera.

**Exercice 3** (facultatif). On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k)}{2^n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k)}{2^k}.$$

Étudier le comportement asymptotique de  $(u_n)$  et, si vous suivez l'option mathématiques expertes, de  $(v_n)$ .