

Corrigé du devoir à la maison n°9

Partie 1. Formule de Taylor pour la fonction exponentielle

1. a. La fonction g_n est la produit de la composée de la fonction affine $t \mapsto x - t$ suivie de la fonction polynôme $X \mapsto X^{n+1}$ et de la fonction exp toutes trois dérivables sur $\mathbb{R}$ donc g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t ,

$$g'_n(t) = (-1) \times (n+1)(x-t)^n \times e^t + (x-t)^{n+1} \times e^t = -(n+1)(x-t)^n e^t + g_n(t)$$

donc

$$(x-t)^n e^t = \frac{1}{n+1} [g_n(t) - g'_n(t)].$$

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors, grâce à la question précédente,

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt = \frac{1}{n!} \int_0^x \frac{1}{n+1} [g_n(t) - g'_n(t)] dt.$$

Dès lors, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} \int_0^x g_n(t) dt - \frac{1}{n+1} \int_0^x g'_n(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^x (x-t)^{n+1} e^t dt - \frac{1}{(n+1)!} [g_n(t)]_0^x \\ &= f_{n+1}(x) - \frac{1}{(n+1)!} [g_n(x) - g_n(0)] \end{aligned}$$

Or, $g_n(x) = (x-x)^{n+1} e^x = 0$ et $g_n(0) = (x-0)^{n+1} e^0 = x^{n+1}$ donc on conclut que

$$f_n(x) = f_{n+1}(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$P_n : \ll e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + f_n(x) \gg.$$

Montrons que P_0 est vraie. On a

$$\frac{1}{0!} + f_0(x) = 1 + \frac{1}{0!} \int_0^x (x-t)^0 e^t dt = 1 + \int_0^x e^t dt = 1 + [e^t]_0^x = 1 + e^x - 1 = e^x$$

donc P_0 est vraie.

Supposons que P_k est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, grâce à la question 1.b., $f_{k+1}(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + f_{k+1}(x)$ donc

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + f_k(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + f_{k+1}(x)$$

et donc P_{k+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + f_n(x).$$

Partie 2. Comportement asymptotique de (u_n) et approximation de e

1. On applique le résultat de la question 2. de la **Partie 1** en prenant $x = 1$. On obtient

$$e = e^1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \cdots + \frac{1^n}{n!} + f_n(1) = u_n + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

et donc

$$u_n = e - \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

2. a. On remarque que, en prenant $x = 1$, $h_n = g_{n-1}$ donc, d'après les résultats de la **Partie 1**, la fonction h est dérivable sur $[0; 1]$ et, pour tout $t \in [0; 1]$,

$$h'_n(t) = (1-t)^n e^t - n(1-t)^{n-1} e^t = [(1-t) - n] (1-t)^{n-1} e^t.$$

Soit $t \in [0; 1]$. Comme $t \geq 0$, $1-t \leq 1$ donc, comme $n \geq 1$, $(1-t) - n \leq 0$. Par ailleurs, comme $1-t \geq 0$, $(1-t)^{n-1} \geq 0$ et, comme la fonction $\exp$ est à valeurs strictement positives, $e^t > 0$. On en déduit que $h'_n(t) \leq 0$ donc h_n est décroissante sur $[0; 1]$.

b. Soit $t \in [0; 1]$. Comme la fonction h_n est décroissante sur $[0; 1]$, on a $h_n(1) \leq h_n(t) \leq h_n(0)$. Or, $h_n(0) = (1-0)^n e^0 = 1$ et $h_n(1) = (1-1)^n e^0 = 0$ donc $0 \leq h_n(t) \leq 1$.

c. Par croissance et positivité de l'intégrale, il s'ensuit que

$$0 \leq \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 1 dt = 1$$

donc, en multipliant par $\frac{1}{n!} > 0$, on obtient

$$0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \frac{1}{n!}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geq n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$. Dès lors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$ et donc, grâce au théorème d'encadrement, le résultat de la question 3.c. assure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt = 0.$$

Par somme, on déduit alors du résultat de la question 1. que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.

4. On déduit du résultat de la question 1. que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e - u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

et donc, d'après le résultat de la question 2.c., $\text{pour tout entier } n \geq 1, 0 \leq e - u_n \leq \frac{1}{n!}$.

Ainsi, pour que u_n fournissent une valeur approchée de e à 10^{-6} près, il suffit que $\frac{1}{n!} \leq 10^{-6}$. Alors, l'aide de la calculatrice, on voit que c'est le cas pour $n \geq 10$. Ainsi, u_{10} est une valeur approchée de e à 10^{-6} près. À l'aide de la calculatrice, on trouve que $u_{10} = \frac{9864101}{3628800} \approx 2,718282$ donc $e \approx 2,718282$.

Remarque. On voit que la suite (u_n) converge très rapidement vers e puisqu'en seulement 11 termes, on a déjà une valeur approchée au millionième près!

Partie 3. Irrationalité de e (facultatif)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} > u_n$. Or, d'après la question 4. de la **Partie 2**, $e - u_{n+1} \geq 0$ donc $e \geq u_{n+1} > u_n$ donc $\boxed{u_n < e}$.
2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, en remarquant que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$, il vient

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n!} \right) \\ &= u_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{n! \times (n+1)} \\ &= \frac{2 - (n+1)}{(n+1)!} \\ &= \frac{1-n}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $v_{n+1} - v_n < 0$ donc (v_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n \geq 2$ alors, d'après la question précédente, $v_n > v_{n+1}$. Or, d'après le résultat de la question 4. de la **Partie 2**, $e - u_{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}$ donc $e \leq u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} = v_{n+1}$. Ainsi, $e \leq v_{n+1} < v_n$ donc $e < v_n$. Remarquons, de plus, que $v_1 = v_2 = 3$ donc, comme $v_2 > e$, $v_1 > e$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 1, e < v_n}$.
3. On déduit des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e < v_n$ i.e. $u_n < e < u_n + \frac{1}{n!}$.
En particulier, comme $q \in \mathbb{N}^*$, $u_q < e < u_q + \frac{1}{q!}$. Comme, par hypothèse, $e = \frac{p}{q}$, on conclut que $\boxed{u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q!}}$.
4. Par définition, $u_q = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}$ donc

$$q! \times u_q = \frac{q!}{0!} + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \dots + \frac{(q-1)!}{q!} + \frac{q!}{q!} = q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \dots + \frac{q!}{(q-1)!} + 1.$$

Or, pour tout entier k compris entre 1 et $q-1$,

$$\begin{aligned} q! &= 1 \times 2 \times \dots \times k \times (k+1) \times (k+2) \times \dots \times q \\ &= k! \times (k+1)(k+2) \dots (q-1)q \end{aligned}$$

donc $\frac{q!}{k!} = (k+1)(k+2) \dots (q-1)q$ est un entier. Ainsi, $q! \times u_q$ est une somme d'entiers donc $\boxed{q! \times u_q \text{ est un entier}}$.

5. Multiplions la double inégalité montrée à la question 3. par $q! > 0$. On obtient

$$q! \times u_q < q! \times \frac{p}{q} < q! \times u_q + 1 \quad \text{i.e.} \quad q! u_q < (q-1)! p < q! u_q + 1.$$

Ainsi, $(q-1)!p$ est un entier strictement compris entre les deux entiers $q!u_q$ et $q!u_q + 1$. Or, ces deux entiers sont consécutifs donc il n'y a pas d'entiers strictement compris entre les deux. On aboutit à une contradiction donc $\boxed{e \text{ est irrationnel}}$.