

Devoir à la maison n°9

À rendre le jeudi 30 avril 2020

Le but de ce devoir est de construire une suite de nombres rationnels qui converge vers le nombre e puis d'en déduire, d'une part, une valeur approchée de e et, d'autre part, une preuve de l'irrationalité de e .

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ le produit des entiers de 1 à n . On convient, de plus, que $0! = 1$.

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Partie 1. Formule de Taylor pour la fonction exponentielle

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt.$$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_n : t \mapsto (x-t)^{n+1} e^t.$$

Justifier que g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer, pour tout réel t , $g'_n(t)$ et en déduire que, pour tout réel t ,

$$(x-t)^n e^t = \frac{1}{n+1} [g_n(t) - g'_n(t)].$$

b. En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + f_{n+1}(x).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + f_n(x).$$

Partie 2. Comportement asymptotique de (u_n) et approximation de e

1. En utilisant les résultats de la **Partie 1**, justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = e - \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $h_n : t \mapsto (1-t)^n e^t$ définie sur $[0; 1]$.

a. Étudier les variations de h_n sur $[0; 1]$.

b. En déduire que, pour tout $t \in [0; 1]$, $0 \leq h_n(t) \leq 1$.

c. Conclure que

$$0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \frac{1}{n!}.$$

3. Déduire des questions précédentes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.

4. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq e - u_n \leq \frac{1}{n!}$ et en déduire une valeur approchée de e à 10^{-6} près.

Partie 3. Irrationalité de e (facultatif)

On va montrer que e est un nombre irrationnel i.e. que e ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux entiers. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un entier p et un entier naturel non nul q tels $e = \frac{p}{q}$.

Remarque. On prendra garde au fait que, dans la suite, toutes les inégalités demandées sont des inégalités strictes.

1. Déduire de la **Partie 2** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < e$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

a. Démontrer que (v_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.

b. En déduire, en utilisant également la **Partie 2**, que, pour tout entier $n \geq 1$, $e < v_n$.
(On pourra distinguer le cas $n = 1$ et le cas $n \geq 2$.)

3. Déduire des questions précédentes que

$$u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q!}.$$

4. Justifier que $q! \times u_q$ est un entier.

5. Conclure.

L'irrationalité de e fut démontrée pour la première fois par L. Euler en 1737 en utilisant ce qu'on appelle la théorie des fractions continues. La preuve présentée dans ce qui précède reprend, pour l'essentiel, une autre démonstration, plus simple, donnée par J. Fourier en 1815.