

Corrigé du devoir à la maison n°8

Partie A

1. Comme $k > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -kx = +\infty$. Or, $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kx} = +\infty$. Comme $k + 1 > 0$, on conclut, par produit et somme par des constantes, que $\lim_{-\infty} \varphi = +\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -kx = -\infty$. Or, $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kx} = 0$. Par produit et somme par des constantes, on conclut que $\lim_{+\infty} \varphi = -1$.

2. La fonction φ est dérivable sur \mathbb{R} comme composée, produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x ,

$$\varphi'(x) = (k + 1) \times (-ke^{-kx}) = -k(k + 1)e^{-kx}.$$

Comme $k > 0$ et comme la fonction exponentielle est à valeurs positives, $\varphi'(x) > 0$ pour tout réel x donc φ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

3. La fonction φ est dérivable donc continue et strictement décroissante sur \mathbb{R} . De plus, $0 \in \left] \lim_{+\infty} \varphi ; \lim_{-\infty} \varphi \right[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α_k tel que $\varphi(\alpha_k) = 0$.

4. On en déduit que, pour tout $x \in]-\infty ; \alpha_k[$, $\varphi(x) > 0$, que $\varphi(\alpha_k) = 0$ et que, pour tout $x \in]\alpha_k ; +\infty[$, $\varphi(x) < 0$.

5. On remarque que $\varphi(0) = (k + 1)e^0 - 1 = k + 1 - 1 = k > 0$ donc, grâce à la question précédente, $0 \in]-\infty ; \alpha_k[$ i.e. $\alpha_k > 0$.

6. Au vu de la question 4., pour montrer que $\alpha_k \geq \frac{1}{2}$, il suffit de montrer que $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$ i.e. $(k + 1)e^{-\frac{k}{2}} - 1 \geq 0$. Pour cela, considérons la fonction $d : t \mapsto (t + 1)e^{-\frac{t}{2}} - 1$ définie sur $[0 ; 1]$. Cette fonction est dérivable sur $[0 ; 1]$ comme composée, produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout $t \in [0 ; 1]$,

$$d'(t) = 1 \times e^{-\frac{t}{2}} + (t + 1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1 - t}{2} e^{-\frac{t}{2}}.$$

Or, pour tout $t \in [0 ; 1]$, $t \leq 1$ et $e^{-\frac{t}{2}} > 0$ donc $d'(t) \geq 0$ et ainsi d est croissante sur $[0 ; 1]$. On en déduit que, pour tout $t \in [0 ; 1]$, $d(t) \geq d(0)$ i.e. $d(t) \geq 0$. Comme $k \in [0 ; 1]$, on conclut que $d(k) \geq 0$ i.e. $(k + 1)e^{-\frac{k}{2}} - 1 \geq 0$. On conclut donc que $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$ donc $\alpha_k \geq \frac{1}{2}$.

Partie B

1. a. Comme g est dérivable et non nulle sur $]-\infty ; \alpha_k[$, h est définie et dérivable sur $]-\infty ; \alpha_k[$ et

$$h' = -\frac{g'}{g^2} = -\frac{g^2 + kg}{g^2} = -1 - \frac{k}{g} = -kh - 1.$$

Ainsi, h est solution sur $]-\infty ; \alpha_k[$ de l'équation différentielle (F) : $y' = -ky - 1$.

- b.** Par théorème, on en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in]-\infty; \alpha_k[$, $h(x) = Ce^{-kx} - \frac{1}{k}$. De plus, $h(0) = \frac{1}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$ donc $Ce^0 - \frac{1}{k} = 1$ i.e. $C = 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$. On conclut donc que, pour tout $x \in]-\infty; \alpha_k[$,

$$h(x) = \frac{k+1}{k}e^{-kx} - \frac{1}{k} = \frac{(k+1)e^{-kx} - 1}{k}.$$

- 2.** On remarque que, pour tout $x \in]-\infty; \alpha_k[$, $h(x) = \frac{\varphi(x)}{k}$ et, d'après la question **4.** de la **Partie A**, $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in]-\infty; \alpha_k[$ donc, comme $k > 0$, la fonction h est strictement positive sur $]-\infty; \alpha_k[$.
- 3.** D'après la question précédente, la fonction h est strictement positive sur $]-\infty; \alpha_k[$. Considérons alors la fonction $f = \frac{1}{h}$. Elle est bien définie et dérivable sur $]-\infty; \alpha_k[$. De plus, comme h est solution de (F) sur $]-\infty; \alpha_k[$,

$$f' = -\frac{h'}{h^2} = -\frac{-kh - 1}{h^2} = \frac{k}{h} + \frac{1}{h^2} = f^2 + kf$$

donc f est solution de (E) sur $]-\infty; \alpha_k[$. De plus, $f(0) = \frac{1}{h(0)} = \frac{1}{1} = 1$.

On conclut donc que $f : x \mapsto \frac{k}{(k+1)e^{-kx} - 1}$ est une solution de (E) sur $]-\infty; \alpha_k[$ et $f(0) = 1$.

- 4. a.** Comme f_1 est dérivable sur $]-\infty; \alpha_k[$, elle est continue sur $]-\infty; \alpha_k[$ et en particulier, elle est continue en 0. Ainsi, pour tout réel $t > 0$, il existe un réel $r > 0$ tel que, pour tout $x \in]-r; r[$, $f(x) \in]f_1(0) - t; f_1(0) + t[$ i.e. $f(x) \in]1 - t; 1 + t[$. En particulier, en prenant $t = \frac{1}{2}$, il existe un intervalle ouvert $I =]-r; r[$ contenant 0 tel que, pour tout $x \in I$, $f_1(x) \in]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}[$ et donc, en particulier, $f_1(x) > 0$.
- b.** Par définition de J , $I \subset J$ donc $1 \in J$. De plus, si $x \in J$ alors il existe un intervalle ouvert K vérifiant les deux points de l'énoncé tel que $x \in K$ donc $f_1(x) > 0$. Ainsi, J vérifie bien les deux points de l'énoncé.
- c.** Comme, pour tout $x \in J$, $f_1(x) = f(x)$, f et f_1 ont les mêmes limites en a à droite. Or, si $a \neq -\infty$, par continuité de f et de f_1 en a , $f_1(a) = \lim_{a^+} f_1 = \lim_{a^+} f = f(a) > 0$. Dès lors, en raisonnant comme dans la question **a.**, il existe un réel $r > 0$ tel que, pour tout $x \in]a - r; a + r[$, $f_1(x) > 0$. Comme $]a; b[$ contient 1, on en déduit que $]a - r; b[$ contient et, pour tout $x \in]a - r; b[$, $f_1(x) > 0$. Ainsi, par définition de J , $]a - r; b[\subset]a; b[$ ce qui contredit le fait que $r > 0$. Ainsi, $a = -\infty$. Par le même raisonnement, on obtient que $b = \alpha_k$.
- d.** On conclut que $]-\infty; \alpha_k[$ et donc f et f_1 coïncident sur $]-\infty; \alpha_k[$ i.e. $f_1 = f$. Ainsi, f est unique.