

## Devoir à la maison n°8

À rendre le vendredi 26 mars 2021

Dans toute la suite,  $k$  est un réel appartenant à  $]0; 1]$ .

**Partie A.** — On considère la fonction  $\varphi : x \mapsto (k + 1)e^{-kx} - 1$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1. Déterminer les limites de  $\varphi$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
2. Étudier les variations de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. En déduire qu'il existe un unique réel  $\alpha_k$  tel que  $\varphi(\alpha_k) = 0$ .
4. Donner, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , le signe de  $\varphi(x)$  en fonction de  $x$ .
5. Justifier que  $\alpha_k > 0$ .
6. (facultatif) Montrer que  $\alpha_k \geq \frac{1}{2}$ .

**Partie B.** — On s'intéresse à l'existence d'une solution  $f$  de l'équation différentielle

$$(E) : y' = y^2 + ky$$

sur  $] -\infty ; \alpha_k[$  telle que  $f(0) = 1$ .

1. Supposons que  $(E)$  admette une solution  $g$  qui ne s'annule pas sur  $] -\infty ; \alpha_k[$  et telle que  $g(0) = 1$ . Posons  $h = \frac{1}{g}$  sur  $] -\infty ; \alpha_k[$ .
  - a. Montrer que  $h$  vérifie une équation différentielle simple sur  $] -\infty ; \alpha_k[$ .
  - b. En déduire l'expression explicite de  $h$ .
2. Justifier que la fonction  $h$  ainsi définie est strictement positive sur  $] -\infty ; \alpha_k[$ .
3. Démontrer qu'il existe une solution  $f$  de  $(E)$  sur  $] -\infty ; \alpha_k[$  telle que  $f(0) = 1$ .
4. (facultatif) On souhaite montrer que la fonction  $f$  est unique. Pour cela, on considère une autre fonction  $f_1$  solution de  $(E)$  sur  $] -\infty ; \alpha_k[$  et telle que  $f_1(0) = 1$ .
  - a. Justifier qu'il existe un intervalle ouvert  $I$  inclus dans  $] -\infty ; \alpha_k[$  tel que
    - $0 \in I$ ;
    - pour tout  $x \in I$ ,  $f_1(x) > 0$ .
  - b. On considère l'union  $J$  de tous les intervalles ouverts qui vérifient les deux points précédents. On admet que  $J$  est un intervalle ouvert et on écrit  $J = ]a; b[$ .  
Montrer que  $J$  vérifie les deux points précédents.
  - c. Comme  $f_1(x) > 0$  pour tout  $x \in J$ , le même raisonnement que celui de la question 1. montre que, pour tout  $x \in J$ ,  $f_1(x) = f(x)$ .  
En raisonnant par l'absurde, montrer que  $a = -\infty$  et  $b = \alpha_k$ .
  - d. Conclure.