

Corrigé du devoir à la maison n°8

Exercice 1

1. a. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim_{+\infty} g = +\infty}$.

- b. Pour tout $x > 0$, $-\frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = -\frac{-\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \ln(x) \times \frac{x}{1} = x \ln(x)$.

Or, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et, par théorème, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = -0$ i.e. $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x - 1 = -1$, par somme, $\boxed{\lim_0 g = -1}$.

- c. La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ par produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} + 1 = \ln(x) + 2.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq -2 \Leftrightarrow x \geq e^{-2}$$

Ainsi, $g'(x) \geq 0$ si $x \in [e^{-2}; +\infty[$ et $g'(x) \leq 0$ si $x \in]-\infty; e^{-2}]$ donc g est décroissante sur $] -\infty; e^{-2}]$ et croissante sur $[e^{-2}; +\infty[$.

On en déduit donc le tableau de suivant.

x	0	e^{-2}	$+\infty$
Variation de g	0	$-e^{-2} - 1$	$+\infty$

- d. On a $g(1) = 1 \ln(1) + 1 - 1 = 0$.
- e. D'après le tableau g est négative sur $]0; e^{-2}]$. De plus, sur $[e^{-2}; +\infty[$ g est croissante et s'annule en 1 donc g change de signe en 1 et en 1 seulement.
- On conclut donc que $\boxed{g(x) \leq 0 \text{ si } x \in]0; 1] \text{ et } g(x) \geq 0 \text{ si } x \in [1; +\infty[}$.
2. a. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + (x - 1) \times \frac{1}{x} = \ln(x) + \frac{x - 1}{x} = \frac{x \ln(x) + x - 1}{x}$$

donc, on a bien, $\boxed{\text{pour tout réel } x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x}}.$

- b. Pour tout $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ donc $f'(x) \leq 0$ si $x \in]0; 1]$ et $f'(x) \geq 0$ si $x \in [1; +\infty[$.

Ainsi, f est décroissante sur $]0; 1]$ et est croissante sur $[1; +\infty[$.

3. Soit $a \in]0; 1[$. Le coefficient directeur de T_{1-a} est $f'(1-a)$ et le coefficient directeur de T_{1+a} est $f'(1+a)$. On cherche donc si $f'(1-a) = -f'(1+a)$ i.e. $f'(1-a) + f'(1+a) = 0$. Rappelons que, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{x} = \frac{x \ln(x) + x - 1}{x} = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}.$$

donc

$$\begin{aligned} f'(1-a) + f'(1+a) &= \ln(1-a) + 1 - \frac{1}{1-a} - \left(\ln(1+a) + 1 - \frac{1}{1+a} \right) \\ &= \ln(1-a) - \ln(1+a) - \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} \end{aligned}$$

Considérons la fonction $d : x \mapsto \ln(1-x) - \ln(1+x) - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$ définie sur $[0; 1[$. Cette fonction est dérivable sur $]0; 1[$ comme composée et sommes de fonctions dérivables et, pour tout $x \in]0; 1[$,

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \left(-\frac{-1}{(1-x)^2} \right) - \frac{1}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Or, comme $x \in]0; 1[$, $1-x > 0$, $1+x > 0$, $(1-x)^2 > 0$ et $(1+x)^2 > 0$, $d'(x) < 0$ donc d est strictement décroissante sur $[0; 1[$. De plus, $d(0) = \ln(1) - \ln(1) - 1 + 1 = 0$ donc, pour tout $x \in]0; 1[$, $d(x) < 0$. En particulier, $d(a) \neq 0$ donc il n'existe pas de réel $a \in]0; 1[$ tel que $f'(1-a) = -f'(1+a)$.

On conclut qu'il n'existe pas de réel $a \in]0; 1[$ tel que les droites T_{1-a} et T_{1+a} aient des coefficients directeurs opposés.

Exercice 2 (facultatif)

1. Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{x} - \ln(x+1)$ définie sur $]0; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée et somme de fonctions dérivables et, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{x(x+1) - (x+1) - x^2}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)} < 0$$

donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$\ln(x) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et, comme la fonction $\ln$ est continue en 1, $\lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$. Ainsi, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$ et donc, par somme,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Ainsi, comme f est strictement décroissante et tend vers 0 en $+\infty$, $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } x > 0, \ln(x+1) \leq \ln(x) + \frac{1}{x}}$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $P_n : \ll \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \gg$.

Comme $\ln(2) \approx 0,69 \leq 1$, la proposition P_1 est vraie.

Supposons que P_m soit vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$.

Alors, grâce au point 1.,

$$\ln(m+2) \leq \ln(m+1) + \frac{1}{m+1} \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \frac{1}{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k}$$

donc P_{m+1} est vraie et on a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$.