

Devoir à la maison n°8

À faire pour le mardi 31 mars 2020

Exercice 1. — On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\forall x > 0 \quad f(x) = (x - 1) \ln(x).$$

1. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\forall x > 0 \quad g(x) = x \ln(x) + x - 1.$$

a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

b. Justifier que, pour tout $x > 0$, $x \ln(x) = -\frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ et en déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

Déterminer la limite de g en 0.

c. Étudier les variations de g sur $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de g sur $]0; +\infty[$.

d. Calculer $g(1)$.

e. Déterminer le signe de $g(x)$ pour tout réel $x > 0$.

2. a. Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et démontrer que

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

b. Déterminer les variations de f sur $]0; +\infty[$.

3. On note $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et, pour tout réel $m > 0$, on note T_m la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse m .

Existe-t-il un réel $a \in]0; 1[$ tel que les droites T_{1-a} et T_{1+a} aient des coefficients directeurs opposés ?

Exercice 2 (facultatif)

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\ln(x+1) \leq \ln(x) + \frac{1}{x}$.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.