

# Corrigé du devoir à la maison n°7

## Exercice 1.

1. a. Pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = x \Leftrightarrow 1 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation  $g(x) = 0$  est  $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ .

b. Pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) \geq \ln(x) \Leftrightarrow 1-x \geq x \Leftrightarrow 1 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}.$$

On en déduit que  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \in ]0; \frac{1}{2}]$  et  $g(x) \leq 0$  pour tout  $x \in [\frac{1}{2}; 1[$ .

2. a. La fonction  $x \mapsto -x \ln x$  est dérivable sur  $]0; 1[$  comme produit de fonctions dérivables. La fonction  $x \mapsto 1-x$  est dérivable et strictement positive sur  $]0; 1[$  donc, par composition,  $x \mapsto \ln(1-x)$  est dérivable sur  $]0; 1[$ . Par produit, la fonction  $x \mapsto (1-x) \ln(1-x)$  est dérivable sur  $]0; 1[$  et donc, par différence,  $f$  est dérivable sur  $]0; 1[$ . De plus, pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \ln x - x \times \frac{1}{x} - (-1) \ln(1-x) - (1-x) \times \frac{-1}{1-x} \\ &= -\ln x - 1 + \ln(1-x) + 1 \\ &= \ln(1-x) - \ln x. \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $f'(x) = g(x)$ .

On déduit alors de la question 1.b. que  $f'(x)$  est positive pour  $x \in ]0; \frac{1}{2}]$  et  $f'(x)$  est négative pour  $x \in [\frac{1}{2}; 1[$  donc  $f$  est croissante sur  $]0; \frac{1}{2}]$  et décroissante sur  $[\frac{1}{2}; 1[$ .

b. Par théorème,  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ . De plus, par continuité,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x) \ln(1-x) = 1 \ln(1) = 0$  donc, par différence,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

Pour la limite en 1, on pose  $X = 1-x$  i.e.  $x = 1-X$  et alors

$$f(x) = -(1-X) \ln(1-X) - X \ln X = f(X).$$

Or,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} X = 0^+$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X > 0}} f(X)$  i.e. d'après ce qui précède,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .

c. On aboutit ainsi au tableau de variation suivant :

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f$	0	↗ ln 2	↘ 0

3. a. La fonction  $f$  est majorée sur  $]0; 1[$  par  $\ln 2$  i.e. pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $f(x) \leq \ln 2$ . Comme  $a > 0$  et  $b > 0$ ,  $a = 1 - b < 1$  donc on peut appliquer ce qui précède à  $x = a$ , ce qui donne  $-a \ln a - (1 - a) \ln(1 - a) \leq \ln 2$  i.e. puisque  $1 - a = b$ ,  $-a \ln a - b \ln b \leq \ln 2$ . En utilisant le fait que  $-\ln a = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$  et  $-\ln b = \ln\left(\frac{1}{b}\right)$ , on conclut que

$$\boxed{a \ln\left(\frac{1}{a}\right) + b \ln\left(\frac{1}{b}\right) \leq \ln 2}.$$

- b. L'inégalité précédente est une égalité si et seulement si  $f(a) = \ln 2$  i.e. d'après l'étude de  $f$ , si et seulement si  $a = \frac{1}{2}$ . Et comme  $b = 1 - a$ , on conclut qu'il y a égalité dans l'inégalité ci-dessus si et seulement si  $a = b = \frac{1}{2}$ .

### Exercice 2.

1. a. Pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 1) = x \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ainsi,  $\boxed{\text{l'unique solution de } f(x) = x \text{ est } x = 0}$ .

- b. La fonction  $f$  est la différence de la fonction affine  $x \mapsto x$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et de la composée de la fonction polynôme  $x \mapsto x^2 + 1$  dérivable et strictement positive sur  $\mathbb{R}$  avec la fonction  $\ln$  dérivable sur  $]0; +\infty[$ . Dès lors,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} \geq 0.$$

Ainsi,  $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \text{ et donc sur } [0; 1]}$ .

Dès lors, pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ . Or,  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1 - \ln 2 \approx 0,3 \leq 1$  donc,  $\boxed{\text{pour tout } x \in [0; 1], f(x) \in [0; 1]}$ .

2. a. Considérons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la proposition  $P_n : \ll u_n \in [0; 1] \gg$ .

- Comme  $u_0 = 1$ ,  $P_0$  est vraie.
- Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P_k$  est vraie. Alors,  $u_k \in [0; 1]$  donc, d'après la question 1.b,  $f(u_k) \in [0; 1]$ . Or,  $f(u_k) = u_k - \ln(u_k^2 + 1) = u_{k+1}$  donc  $u_{k+1} \in [0; 1]$  ce qui prouve que  $P_{k+1}$  est vraie et on a ainsi démontré par récurrence que,  $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]}$ .

- b. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,  $u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(u_n^2 + 1) - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$ . Or,  $u_n^2 \geq 0$  donc  $u_n^2 + 1 \geq 1$  et, par croissance de  $\ln$ ,  $\ln(u_n^2 + 1) \geq 0$ . Ainsi,  $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1) \leq 0$  ce qui prouve que la suite  $\boxed{(u_n)}$  est décroissante.

- c. On a vu que  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente. Notons  $\ell$  sa limite. Alors, d'une part,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$  et, d'autre part, comme la fonction  $f$  est continue (car dérivable) sur  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ . Ainsi, par unicité de la limite,  $\ell = f(\ell)$ . On déduit alors de la question 1.a que  $\ell = 0$ . Ainsi,  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$ .

### Exercice 3.

1. On a vu en exercice que, pour tout réel  $t > -1$ ,  $\ln(1 + t) \leq t$  donc, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\ln\left(1 - \frac{1}{2k + 2}\right) \leq -\frac{1}{2k + 2}$ . Dès lors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n \leq \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2k + 2}\right) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k + 1}$$

et, en réutilisant que, pour tout réel  $t > -1$ ,  $\ln(1+t) \leq t$ ,

$$\frac{1}{k+1} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) = \ln(k+2) - \ln(k+1).$$

On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \geq \sum_{k=0}^n [\ln(k+2) - \ln(k+1)]$$

donc, en multipliant par  $-\frac{1}{2} < 0$ , il vient

$$u_n \leq -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \leq -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n [\ln(k+2) - \ln(k+1)].$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n [\ln(k+2) - \ln(k+1)] &= \ln(2) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(3) + \dots + \ln(n+2) - \ln(n+1) \\ &= \ln(n+2) \end{aligned}$$

car, dans la somme, les termes s'annulent deux à deux sauf  $\ln(1) = 0$  et  $\ln(n+2)$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n \leq -\frac{1}{2} \ln(n+2).$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(n+2) = -\infty$  donc, par le théorème de comparaison,  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty}$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$u_n = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 - \frac{1}{2k+2}\right) = \sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n+1}{2n+2}\right)$$

Dans le dernier logarithme, au numérateur, on a le produit des entiers impairs de 1 à  $2n+1$ . Ainsi, si on multiplie par le produit des entiers pairs de 2 à  $2n+2$ , on aura exactement  $(2n+2)!$ . Or, ce produit n'est autre que le dénominateur de la fraction donc

$$u_n = \ln\left(\frac{(2n+2)!}{(2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n+2))^2}\right).$$

De plus, en factorisant chaque entier pair par 2, on a

$$\begin{aligned} 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n+2) &= (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \dots \times (2 \times (n+1)) \\ &= 2^{n+1}(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n+1)) \\ &= 2^{n+1}(n+1)! \end{aligned}$$

donc

$$u_n = \ln\left(\frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}\right) = \ln(v_{n+1}).$$

Il s'ensuit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = e^{u_{n-1}}$ . Or, on a vu que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n-1} = -\infty$  et, comme  $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ , on conclut, par composition, que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0}.$$