Devoir à la maison n°7

À rendre le mercredi 3 mars 2021

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $]0\,;1[$ par $f(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$.

1. Soit g la fonction définie sur $]0\,;1[$ par $g(x) = \ln(1-x) - \ln x$.

a. Résoudre, dans $]0\,;1[$, l'équation $g(x) = 0$.

b. Étudier, pour tout $x \in\,]0\,;1[$, le signe de $g(x)$ en fonction de x.

2. a. Justifier que f est dérivable sur $]0\,;1[$ et déterminer sa dérivée.
En déduire les variations de f sur $]0\,;1[$.

b. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c. Dresser le tableau de variation de f sur $]0\,;1[$.

3. On considère deux réels a et b strictement positifs tels que $a+b=1$.

a. Utiliser les résultats de la question **2.** pour démontrer que

$$a\ln\left(\frac{1}{a}\right) + b\ln\left(\frac{1}{b}\right) \leqslant \ln 2.$$

b. Démontrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $a = b = \frac{1}{2}$.

Exercice 2.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.
En déduire que si $x \in [0\,;1]$ alors $f(x) \in [0\,;1]$.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right)$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\,;1]$.

b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 (facultatif)**.** On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k+2}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

2. En déduire le comportement asymptotique de (v_n).