

Corrigé du devoir à la maison n°7

Exercice 1

1. a. Par définition, $z_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + i)z_0$ donc $\boxed{z_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i}$.

De même,

$$z_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + i) \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

ainsi $\boxed{z_2 = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i}$.

De même,

$$z_3 = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + i) \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{8}i + \frac{1}{8}i - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}i \right)$$

ainsi $\boxed{z_3 = \frac{1}{8}i}$.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= A_{n+1}A_{n+2} = |z_{n+2} - z_{n+1}| \\ &= \left| \frac{1}{4}(\sqrt{3} + i)z_{n+1} - \frac{1}{4}(\sqrt{3} + i)z_n \right| \\ &= \left| \frac{1}{4}(\sqrt{3} + i)(z_{n+1} - z_n) \right| \end{aligned}$$

Par théorème, $\left| \frac{1}{4}(\sqrt{3} + i)(z_{n+1} - z_n) \right| = \frac{1}{4} |\sqrt{3} + i| |z_{n+1} - z_n|$. Or,

$$|\sqrt{3} + i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

et $|z_{n+1} - z_n| = A_n A_{n+1} = u_n$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{4} \times 2 \times u_n$ i.e. $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$.

Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{2}}$.

- c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_nA_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Comme (u_n) est une suite géométrique alors

$$\ell_n = u_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = |z_1 - z_0| \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = |z_1 - z_0| \times 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Or, $z_1 - z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i - 1 = \frac{\sqrt{3}-4}{4} + \frac{1}{4}i$ donc

$$|z_1 - z_0| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-4}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3 - 8\sqrt{3} + 16 + 1}{16}} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}{2}$$

donc $\boxed{\ell_n = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$.

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$.

2. a. On a vu précédemment que $|\sqrt{3} + i| = 2$. De plus,

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

donc $\boxed{\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P_n : \ll z_n = (2k)^n e^{i\frac{n\pi}{6}} \gg$.

Comme $(2k)^0 e^{i\frac{0\pi}{6}} = 1e^{i0} = 1 = z_0$ donc P_0 est vraie.

On suppose que P_m est vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

Alors, $z_{m+1} = k(\sqrt{3} + i)z_m = k \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} \times (2k)^m e^{i\frac{m\pi}{6}} = (2k)(2k)^m e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{6})}$ i.e. $z_{m+1} = (2k)^{m+1} e^{i\frac{(m+1)\pi}{6}}$ donc P_{m+1} est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, z_n = (2k)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}}$.

c. Comme $k > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $OA_n = |z_n| = (2k)^n$ donc OA_n est une suite géométrique raison $2k$. Ainsi,

- si $k < \frac{1}{2}$ alors $2k < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} OA_n = 0$ et ainsi le point A_n tend à se rapprocher de O ;
- si $k = \frac{1}{2}$ alors $2k = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $OA_n = 1$ donc la distance OA_n est constante ;
- si $k > \frac{1}{2}$ alors $2k > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} OA_n = +\infty$ et ainsi le point A_n tend à s'éloigner de O.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le point A_n appartient à la droite (OA_m) si et seulement si $\arg(z_n) = \arg(z_m) [2\pi]$ ou $\arg(z_n) = \arg(z_m) + \pi [2\pi]$ i.e. $\arg(z_n) = \arg(z_m) [\pi]$. Or, d'après ce qui précède $\arg(z_n) = \arg((2k)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}) = \frac{n\pi}{6} [2\pi]$ et, de même, $\arg(z_m) = \frac{m\pi}{6} [2\pi]$. Ainsi, A_n appartient à (OA_m) si et seulement si $\frac{n\pi}{6} = \frac{m\pi}{6} [\pi]$ i.e. $\frac{(n-m)\pi}{6} = 0 [\pi]$ i.e. si et seulement s'il existe un entier d tel que $\frac{(n-m)\pi}{6} = d\pi$ ce qui équivaut à $(n-m)\pi = 6d\pi$ soit $n-m = 6d$.

On conclut que $\boxed{A_n \text{ appartient à } (OA_m) \text{ si et seulement si } 6 \text{ divise } n-m}$.

3. a. Comme $|z_n| = (2k)^n = 1^n = 1$, $\boxed{|z_n| \neq 0}$.

b. On a $z_n = (2k)^n e^{i\frac{n\pi}{6}} = (1)^n e^{i\frac{n\pi}{6}} = e^{i\frac{n\pi}{6}}$ donc

$$\frac{z_{n+3}}{z_n} = \frac{e^{i\frac{(n+3)\pi}{6}}}{e^{i\frac{n\pi}{6}}} = e^{i\frac{(n+3-n)\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

c'est-à-dire $\boxed{\frac{z_{n+3}}{z_n} = i}$.

c. On a $\left| \frac{z_{n+3}}{z_n} \right| = |i| = 1$ et $\left| \frac{z_{n+3}}{z_n} \right| = \frac{|z_{n+3}|}{|z_n|} = \frac{OA_{n+3}}{OA_n}$ donc $\frac{OA_{n+3}}{OA_n} = 1$ i.e. $OA_{n+3} = OA_n$. Ainsi, $A_n OA_{n+3}$ est isocèle en O.

De plus, $\arg\left(\frac{z_{n+3}}{z_n}\right) = \arg(i) [2\pi] = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z_{n+3}}{z_n}\right) &= \arg(z_{n+3}) - \arg(z_n) [2\pi] \\ &= \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_{n+3}}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_n}\right) [2\pi] \\ &= \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_{n+3}}\right) + \left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{u}\right) [2\pi] \\ &= \left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_{n+3}}\right) [2\pi] \\ &= \left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_{n+3}}\right) [2\pi]\end{aligned}$$

donc $\left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_{n+3}}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc A_nOA_{n+3} est rectangle en O.

On conclut que le triangle A_nOA_{n+3} est rectangle isocèle en O.

Exercice 2 (facultatif)

1. Soit (w_n) une suite de nombres complexes non nuls qui converge vers une limite non nulle ℓ . Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \operatorname{Re}(w_n)$ et $b_n = \operatorname{Im}(w_n)$ et écrivons $\ell = a + ib$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{a_{n+1} + ib_{n+1}}{a_n + ib_n} = \frac{(a_{n+1} + ib_{n+1})(a_n - ib_n)}{a_n^2 + b_n^2} \\ &= \frac{a_{n+1}a_n - ia_{n+1}b_n + ib_{n+1}a_n + b_{n+1}b_n}{a_n^2 + b_n^2} \\ &= \frac{a_na_{n+1} + b_nb_{n+1}}{a_n^2 + b_n^2} + i \frac{a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n}{a_n^2 + b_n^2}\end{aligned}$$

et donc

$$\operatorname{Re}\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right) = \frac{a_na_{n+1} + b_nb_{n+1}}{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right) = \frac{a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n}{a_n^2 + b_n^2}$$

Or, par définition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = b$ donc, par opération,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right) = \frac{ab - ab}{a^2 + b^2} = 0$$

donc la suite de nombres complexes $\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right)$ converge vers 1.

2. Supposons que la suite (e^{in}) converge vers un réel ℓ . Si $\ell = 0$ alors les suites $(\operatorname{Re}(e^{in}))$ et $(\operatorname{Im}(e^{in}))$ convergent vers 0 i.e. $(\cos(n))$ et $(\sin(n))$ converge vers 0. Dès lors, $(\cos^2(n)) + \sin^2(n)$ converge vers 0 ce qui absurde car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$ donc $(\cos^2(n) + \sin^2(n))$ converge vers 1. Ainsi, $\ell \neq 0$ donc, d'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{i(n+1)}}{e^{in}} = 1$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{e^{i(n+1)}}{e^{in}} e^{i(n+1-n)} = e^i$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{i(n+1)}}{e^{in}} = e^i$. Par unicité de la limite, $1 = e^i$ ce qui est absurde. Ainsi, on conclut que la suite (e^{in}) diverge.

- 3.** Supposons que la suite réelle $(\sin(n))$ ait une limite. Comme $(\sin(n))$ est bornée, sa limite est finie donc $(\sin(n))$ converge vers un réel a . Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin(n+1) = \sin(n) \cos(1) + \cos(n) \sin(1)$$

et $\sin(1) \neq 0$, $\cos(n) = \frac{\sin(n+1) - \sin(n) \cos(1)}{\sin(1)}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n) = a$ donc $(\cos(n))$ converge vers $\frac{a - a \cos(1)}{\sin(1)}$. Ainsi, les deux suites $(\cos(n))$ et $(\sin(n))$ convergent donc (e^{in}) converge, ce qui est absurde d'après la question précédente.

On conclut que la suite $(\sin(n))$ diverge sans avoir de limite.