

Devoir à la maison n°7
À rendre le vendredi 6 mars 2020

Exercice 1. — Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère un réel $k > 0$ et on pose $z_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} = k(\sqrt{3} + i)z_n.$$

On note, de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n le point d'affixe z_n .

1. Dans cette question, on suppose que $k = \frac{1}{4}$.
 - a. Déterminer les formes algébriques de z_1 , z_2 et z_3 .
 - b. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = A_n A_{n+1}$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
 - c. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \cdots A_n A_{n+1}$ et on note ℓ_n sa longueur.
Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ℓ_n en fonction de n et en déduire la limite de (ℓ_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Dans cette question, k est un réel strictement positif quelconque.
 - a. Écrire $\sqrt{3} + i$ sous forme exponentielle.
 - b. En déduire, en raisonnant par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = (2k)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
 - c. Déterminer, selon la valeur de k , si le point A_n a tendance à se rapprocher de l'origine O , à s'éloigner de l'origine O ou à rester à une distance constante de O lorsque n augmente.
 - d. Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble des entiers n tels que le point A_n appartienne à la droite (OA_m) .
3. Dans cette question, on suppose que $k = \frac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Justifier que $z_n \neq 0$.
 - b. Montrer que $\frac{z_{n+3}}{z_n} = i$.
 - c. En déduire, en utilisant un raisonnement faisant intervenir des calculs de module et d'argument, la nature précise du triangle $A_n O A_{n+3}$.

Exercice 2 (facultatif). — On considère une suite de nombres complexes (w_n) . On dit que (w_n) converge si les deux suites réelles $(\operatorname{Re}(w_n))$ et $(\operatorname{Im}(w_n))$ convergent vers des limites respectives ℓ_R et ℓ_I . Dans ce cas, le nombre $\ell_R + i\ell_I$ est appelé la limite de (w_n) . (On admet que cette limite est unique.)

1. Démontrer que si (w_n) est une suite de nombres complexes non nuls qui converge vers une limite non nulle alors la suite de nombres complexes $(\frac{w_{n+1}}{w_n})$ converge vers un nombre que l'on déterminera.
2. Montrer que la suite (e^{in}) ne converge pas.
3. En déduire que la suite réelle $(\sin(n))$ diverge sans avoir de limite.