

Corrigé du devoir à la maison n°6

Exercice 1

Partie A

1. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$. Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ donc par produit et somme, $\boxed{\lim_{-\infty} g = +\infty}$.

2. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$4 \left(-\frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 = 4 \left((-1)^2 \frac{x^2}{4} e^{-\frac{x}{2} \times 2} \right) = 4 \times \frac{x^2}{4} e^{-x} = x^2 e^{-x}.$$

b. Grâce à la question précédente, pour tout réel x , $g(x) = 4 \left(-\frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 - 2$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{2} = -\infty$ et, par théorème, $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} =$

0. Par produit et somme que $\boxed{\lim_{-\infty} g = -2}$.

3. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit, composition et somme de fonction dérivable et, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 2x e^{-x} + x^2 (-e^{-x}) = (2x - x^2) e^{-x}$$

i.e. $\boxed{g'(x) = x(2 - x) e^{-x}}$.

4. Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $x(2 - x)$. Or, $x(2 - x)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont 0 et 2 et donc le coefficient dominant est $a = -1 < 0$. Ainsi, $g'(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$, $g'(x) > 0$ pour tout $x \in]0; 2[$ et $g'(0) = g'(2) = 0$. Ainsi, g est strictement décroissante sur $[-\infty; 0]$, strictement croissante sur $[0; 2]$ et strictement décroissante sur $[2; +\infty]$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
Signe de $g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Variation de g	$+\infty$	-2	$4e^{-2} - 2$	-2	

5. a. Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, le maximum de g est $g(2) = 4e^{-2} - 2 < 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $]-\infty; 0]$, g est continue (car dérivable) et strictement décroissante. De plus, $0 \in \left[g(0); \lim_{-\infty} g \right]$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty; 0]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

On conclut donc que $\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ possède une unique solution } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}}$.

b. À l'aide de la calculatrice, on trouve que $-0,9013 < \alpha < -0,9012$.

6. On déduit de l'étude précédente que $\boxed{g(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty; \alpha] \text{ et } g(x) \leq [\alpha; +\infty[}$.

Partie B

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x ,

$$f'(x) = 4x^3 - 8[e^x(x-1) + e^x \times 1] = 4x^3 - 8e^x(x-1+1) = 4x^3 - 8xe^x = 4xe^x(x^2e^{-x} - 2)$$

i.e. $\boxed{f'(x) = 4xe^x g(x)}$.

2. Grâce aux résultats de la question 5. de la **Partie A** et comme $e^x > 0$ pour tout réel x , on obtient le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
signe de x			0	
signe de $g(x)$	+	0	-	-
signe de $f'(x)$	-	0	+	0

Ainsi, $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]-\infty; \alpha], \text{ croissante sur } [\alpha; 0] \text{ et décroissante sur } [0; +\infty[}$.

3. Par définition, $g(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2 e^{-\alpha} - 2 = 0$ et ainsi $e^{-\alpha} = \frac{2}{\alpha^2}$. Dès lors, $e^{-\alpha} = \frac{\alpha^2}{2}$ et donc

$$f(\alpha) = \alpha^4 - 8e^{-\alpha}(\alpha-1) = \alpha^4 - 8\frac{\alpha^2}{2}(\alpha-1) = \alpha^4 - 4\alpha^2(\alpha-1) = \alpha^2(\alpha^2 - 4\alpha + 4) = \alpha^2(\alpha-2)^2$$

i.e. $\boxed{f(\alpha) = (\alpha(\alpha-2))^2}$.

4. La fonction $h : t \mapsto t(t-2)$ est une fonction polynôme du second degré dont le coefficient dominant est $a = 1 > 0$. Elle est donc décroissante sur $]-\infty; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$ (car $a = 1$ et $b = -2$ donc $-\frac{b}{2a} = 1$). Ainsi, comme $-0,9013 \leq \alpha \leq -0,9012 \leq 1$, $h(-0,9013) \geq h(\alpha) \geq h(-0,9012)$ et donc $2,6145 \leq \alpha(\alpha-2) \leq 2,6150$.

Comme la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$, il s'ensuit que

$$(2,6145)^2 \leq (\alpha(\alpha-2))^2 \leq (2,6150)^2$$

i.e. $6,835 \leq f(\alpha) \leq 6,839$. Ainsi, $\boxed{6,83 \leq f(\alpha) \leq 6,84}$.

Exercice 2 (facultatif). — La réponse est oui.

Considérons la fonction $f : x \mapsto e^{\cos(x)} - \cos(e^x)$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$ ce qui prouvera le résultat voulu.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \cos(X) = 1$, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(e^x) = 1$. Ainsi, il existe un réel A tel que, pour tout réel $x \leq A$, $0,5 \leq \cos(e^x) \leq 1,5$.

Considérons un entier relatif N tel que $2\pi N \leq A$. Soit un entier $n \leq N$. Alors, sur l'intervalle $[(2n-1)\pi; 2n\pi]$, f est continue comme somme et composés de fonctions continues et, de plus, $f((2n-1)\pi) \leq e^{\cos((2n-1)\pi)} - 0,5 = e^{-1} - 0,5 < 0$ et $f(2n\pi) \geq e^{\cos(2n\pi)} - 1,5 = e - 1,5 > 0$. Ainsi, par le théorème de valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $\alpha_n \in](2n-1)\pi; 2n\pi[$ tel que $f(\alpha_n) = 0$. Comme il existe une infinité d'entiers $n \leq N$ et comme $\alpha_n \neq \alpha_m$ pour $n \neq m$ car les intervalles $](2n-1)\pi; 2n\pi[$ et $](2m-1)\pi; 2m\pi[$ sont disjoints si $n \neq m$, on conclut que $f(x) = 0$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$ et donc l'équation $e^{\cos(x)} = \cos(e^x)$ d'inconnue x admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$.