

Devoir à la maison n°6

À rendre le mardi 28 janvier 2020

Exercice 1

Partie A. — On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 e^{-x} - 2.$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel x , $x^2 e^{-x} = 4 \left(-\frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right)^2$.
b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout réel x ,

$$g'(x) = x(2 - x)e^{-x}.$$

4. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$ puis tracer son tableau de variation complet.
5. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-4} .
6. Donner, pour tout réel x , le signe de $g(x)$ en fonction de x .

Partie B. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 - 8e^x(x - 1).$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et démontrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = 4xe^x g(x)$$

où g est la fonction définie dans la **partie A**.

2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $f(\alpha) = (\alpha(\alpha - 2))^2$ où α est défini dans la partie **partie A**.
4. Déduire des questions précédentes un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.

Exercice 2 (facultatif). — L'équation $e^{\cos(x)} = \cos(e^x)$ d'inconnue x admet-elle une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$?