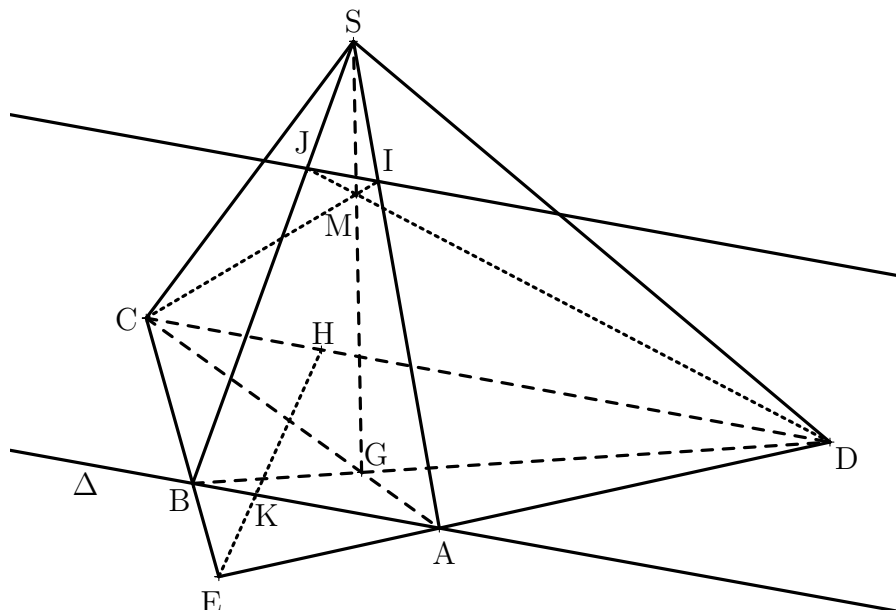


Correction du devoir à la maison n°5

1.



2. Le point S est commun aux deux plans (ASC) et (BSD) donc ceux-ci ne sont pas strictement parallèles. De plus, A appartient à (ASC) mais pas à (BSD) (car A est distinct de D) donc les deux plans ne sont pas confondus. Ils sont donc sécants selon une droite passant par S . De plus, $G \in (AC) \subset (ASC)$ et $G \in (BD) \subset (BSD)$ donc $G \in (ASC) \cap (BSD)$. Comme S et G sont distincts (puisque S n'appartient pas à (CDE)), on conclut que $(ASC) \cap (BSD) = (SG)$.
3. On considère un point M appartenant à $[SG]$ et différent du point G et du point S .
 - a. Comme $M \in (SG)$, $M \in (ASC)$ et donc $(CM) \subset (ASC)$. Ainsi, les droites (CM) et (AS) sont coplanaires donc elles sont soit sécantes soit parallèles. Or, la parallèle à (AS) passant par C est une droite extérieure au triangle ASC donc elle ne coupe pas $[SG]$ et ainsi elle est différente de (CM) . Dès lors, (CM) est sécante à (AS) en un point I .
 - b. Considérons les trois plans (MCD) , (ECD) et (SAB) .
 - Le point M appartient à (MCD) mais pas à (ECD) et les deux points C et D sont communs aux deux plans donc (MCD) et (ECD) sont sécants selon la droite (CD) .
 - Le point E appartient à (ECD) mais pas à (ABS) et les deux points A et B sont communs aux deux plans donc (ECD) et (ABS) sont sécants selon la droites (AB) .
 - Le point C appartient à (MCD) mais pas à (ABS) et les deux points I et J sont communs aux deux plans (puisque $I \in (CM)$ et $J \in (DM)$) donc (MCD) et (ABS) sont sécants selon la droite (IJ) .
 - Enfin, par définition, (AB) et (CD) sont parallèles.
 On déduit donc du théorème du toit que (IJ) est parallèle à (AB) .
4. Posons $a = EH$ et $b = HC$. Alors, $HD = 12 - b$.
 D'après le théorème de Pythagore dans le triangle EHC rectangle en H , $a^2 + b^2 = 7^2 = 49$ et, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle EHD rectangle en H , $a^2 + (12 - b)^2 = 11^2 = 121$ donc $a^2 + 144 - 24b + b^2 = 121$. En remplaçant $a^2 + b^2$ par 49, il vient $49 + 144 - 24b = 121$ donc $24b = 72$ et ainsi $b = 3$. Or, $a = \sqrt{49 - b^2} = \sqrt{40}$ i.e. $a = 2\sqrt{10}$. Ainsi, $EH = 2\sqrt{10}$.

5. a. Comme les droites (AB) et (CD) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès dans les triangles CDE et ECH, $\frac{EB}{EC} = \frac{EA}{ED} = \frac{EK}{EH}$. Ainsi, d'une part, $AB = \frac{EB}{EC} \times CD = \frac{x}{7} \times 12$ donc $\boxed{AB = \frac{12}{7}x}$.

D'autre part, $EK = \frac{EB}{EC} \times EH = \frac{x}{7} \times 2\sqrt{10}$ donc

$$KH = EH - EK = 2\sqrt{10} - \frac{x}{7} \times 2\sqrt{10} = 2\sqrt{10} \left(1 - \frac{x}{7}\right) = 2\sqrt{10} \times \frac{7-x}{7}$$

i.e. $\boxed{KH = \frac{2\sqrt{10}}{7}(7-x)}$.

- b. Le volume d'une pyramide est donnée par $\frac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur associée. Or, ici, par définition, (SG) est orthogonale au plan (CDE) donc (SG) est la hauteur associée à la base ABCD. Mais, par hypothèse, $SG = EB = x$ et l'aire de ABCD est

$$\begin{aligned} \frac{(AB + CD) \times KH}{2} &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{12}{7}x + 12\right) \times \frac{2\sqrt{10}}{7}(7-x) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{12(x+7)}{7} \times \frac{2\sqrt{10}}{7}(7-x) \\ &= \frac{12\sqrt{10}}{49}(7+x)(7-x) \\ &= \frac{12\sqrt{10}}{49}(49-x^2) \end{aligned}$$

donc le volume de la pyramide SABCD est $\frac{1}{3} \times \frac{12\sqrt{10}}{49}(49-x) \times x$ i.e. $\boxed{\frac{4\sqrt{10}}{49}(49x-x^3)}$.

- c. Comme $\frac{4\sqrt{10}}{49} > 0$, la question revient à chercher le maximum de la fonction $f : x \mapsto 49x - x^3$ sur $I =]0; 7[$. C'est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur I et, pour tout réel $x \in I$, $f(x) = 49x - x^3$. Sur I , $f'(x)$ s'annule en $\sqrt{\frac{49}{3}}$ et, comme $-3 < 0$, $f'(x) \geq 0$ si $x \in]0; \sqrt{\frac{49}{3}}]$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \in [\sqrt{\frac{49}{3}}; 7[$. Ainsi, f est croissante sur $]0; \sqrt{\frac{49}{3}}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\frac{49}{3}}; 7[$ donc f atteint son maximum en $x = \sqrt{\frac{49}{3}}$. On conclut donc que le volume de SABCD est maximal si et seulement si $x = \sqrt{\frac{49}{3}}$.