Devoir à la maison n°4

À rendre le vendredi 4 décembre 2020

Partie A. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = -g$ et $g(0) = 1$. On pose, pour tout réel x, $h(x) = g(-x)$.

1. Calculer $h(0)$.

2. Exprimer, pour tout réel x, $h'(x)$ en fonction de $h(x)$.

3. En déduire, pour tout réel x, l'expression de $h(x)$ puis de $g(x)$ en fonction de x.

Partie B. On considère une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 1$ et

$$(*) \text{ pour tout nombre réel } x,\ [f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1.$$

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$.

b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de $(*)$, démontrer que, pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$.

3. On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

c. En déduire les fonctions u et v.

d. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Partie C. Dans cette partie, on considère la fonction f de la **Partie B** dont on a établi l'expression en question **B.3.d.**

1. Étudier la convexité de f et déterminer les éventuels points d'inflexion de sa courbe.

2. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Soit m un nombre réel.

a. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α_m dans $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que $\mathrm{e}^{\alpha_m} = m + \sqrt{m^2 + 1}$.

Partie D (facultatif). Les résultats de la partie précédente montrent qu'à tout réel x, on peut associer un unique réel α_x tel que $f(\alpha_x) = x$. On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ une fonction $k : x \mapsto \alpha_x$. On admet que cette fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$. En considérant la fonction $f \circ k$, montrer que, pour tout réel x,

$$k'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$