

Corrigé du devoir à la maison n°4

Exercice 1

Partie A

- Comme h est une fonction polynôme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty$.
- La fonction h est une fonction polynôme donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x , $h'(x) = 9x^2 - 1 = 9(x - \frac{1}{3})(x + \frac{1}{3})$. Ainsi, $9x^2 - 1$ est un trinôme du second degré dont les racines sont $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$ et donc le coefficient dominant est $9 > 0$. Il s'ensuit que $h'(x) > 0$ si $x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}; +\infty[$, $h'(x) < 0$ si $x \in]-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}[$ et $h(-\frac{1}{3}) = h(\frac{1}{3}) = 0$.

Ainsi, h est strictement croissante sur $] -\infty; -\frac{1}{3}]$, strictement croissante sur $[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{3}; +\infty[$.

On en déduit le tableau suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
variations de h	$-\infty$	$-\frac{241}{9}$	$-\frac{245}{9}$	$+\infty$

- Sur l'intervalle $] -\infty; \frac{1}{3}]$, le maximum de h est $-\frac{241}{9} < 0$ donc, pour tout $x \in] -\infty; \frac{1}{3}]$, $h(x) < 0$ et, en particulier, $h(x) \neq 0$.

Sur $[\frac{1}{3}; +\infty[$, la fonction h est continue car dérivable et strictement croissante. De plus, $h(\frac{1}{3}) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h = +\infty$ donc $0 \in [h(\frac{1}{3}); \lim_{x \rightarrow +\infty} h[$. Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in [\frac{1}{3}; +\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$.

On conclut que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 2,13$.

- On a vu que sur l'intervalle $] -\infty; \frac{1}{3}]$, h est négative. De plus, sur $[\frac{1}{3}; +\infty[$, h est strictement croissante et s'annule en α donc, pour $x \in [\frac{1}{3}; \alpha[$, $h(x) < 0$ et pour $x \in]\alpha; +\infty[$, $h(x) > 0$. On peut donc conclure que :

$$h(x) < 0 \text{ pour tout } x \in]-\infty; \alpha[, h(x) > 0 \text{ pour tout } x \in]\alpha; +\infty[\text{ et } h(\alpha) = 0.$$

Partie B

- Pour tout réel $x > 0$, $f(x) > 0$ et $x + 9 > 0$ donc $g(x) < 0$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $f(x) > g(x)$ ce qui équivaut à dire que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathcal{D}$.
- a. Comme la fonction racine carrée est continue en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0} x\sqrt{x} = 0^+$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} -(x + 9) = -9$ donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$. Par différence, on conclut que $\lim_{x \rightarrow 0} d(x) = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \frac{-x}{x\sqrt{x}} + \frac{-9}{x\sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{x}} + \frac{-9}{x\sqrt{x}}$$

et, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{9}{x\sqrt{x}} = 0$ donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Finalement, par somme, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = +\infty}$.

- b. La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme produit de fonctions dérivables et la fonction g est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme quotient de fonctions dérivables. Dès lors, par somme, $\boxed{d \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}}$.

Pour la dérivée, remarquons que, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1 \times x\sqrt{x} - (x+9) \times \frac{3}{2}\sqrt{x}}{(x\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2x\sqrt{x} - 3(x+9)\sqrt{x}}{2x^3} \\ &= \frac{3x^3\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 3(x+9)\sqrt{x}}{2x^3} \\ &= \frac{\sqrt{x}(3x^3 + 2x - 3x - 27)}{2x^3} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{d'(x) = \frac{\sqrt{x}h(x)}{2x^3}}$.

- c. Pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$ et $2x^3 > 0$ donc le signe de $d'(x)$ est le signe de $h(x)$. Comme $\alpha > 0$, On déduit alors de la question 4. de la partie de la **Partie A** que $d'(x) < 0$ pour tout $x \in]0; \alpha[$, $d'(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$ et $d'(\alpha) = 0$. On conclut donc que d est strictement décroissante sur $]0; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.
- d. On aboutit donc au tableau de variation suivant.

x	0	α	$+\infty$
variations de d	$+\infty$	$d(\alpha)$	$+\infty$

- e. Comme $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathcal{D}$, pour tout $x > 0$, la distance entre les points $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$ est exactement $d(x)$ donc, d'après le tableau précédente, cette distance est minimale si et seulement si $x = \alpha$.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $[0; 1]$ et, pour tout $x \in [0; 1]$, $f'_n(x) = -1 - nx^{n-1} < 0$ car $n > 0$ et $x \geq 0$. Ainsi, f_n est continue car dérivable et strictement décroissante sur $[0; 1]$. De plus, $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha_n \in [0; 1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

Remarque : en fait, on a même $\alpha_n \in]0; 1[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par définition, $f_n(\alpha_n) = 0$ i.e. $1 - \alpha_n - \alpha_n^n = 0$ soit encore $1 - \alpha_n = \alpha_n^n$. Dès lors,

$$f_{n+1}(\alpha_n) = 1 - \alpha_n - \alpha_n^{n+1} = \alpha_n^n - \alpha_n^{n+1} = \alpha_n^n(1 - \alpha_n).$$

Mais, comme $0 < \alpha_n < 1$, $\alpha_n^n > 0$ et $1 - \alpha_n > 0$ donc $\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) > 0}$.

3. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ donc, comme la fonction f_{n+1} est strictement décroissante sur $[0; 1]$, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ ce qui prouve que $\boxed{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$. De plus, elle est majorée par 1 donc, d'après le théorème des suites monotones, on conclut que $\boxed{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers un réel } \ell}$.

4. Comme $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée par 0 et 1, $0 \leq \ell \leq 1$. Supposons que $\ell \neq 1$. Alors, $0 \leq \ell < 1$. Comme (α_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \alpha_n \leq \ell$ donc, par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0; 1]$, $0 \leq \alpha_n^n \leq \ell^n$. Mais, comme $0 \leq \ell < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell^n = 0$. On déduit alors du théorème d'encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^n = 0$. Par somme, il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n + \alpha_n^n = \ell$. Mais, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n + \alpha_n^n = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n + \alpha_n^n = 1$. Par unicité de la limite, on conclut que $\ell = 1$, ce qui est absurde car on a supposé $\ell \neq 1$.

Finalement, on conclut que $\ell = 1$.