

Devoir à la maison n°4

À rendre le jeudi 5 décembre 2019

Exercice 1

Partie A. — On considère la fonction $h : x \mapsto 3x^3 - x - 27$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ puis déterminer une valeur approchée de α à 0,01 près.
4. Déterminer, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, le signe de $h(x)$ en fonction de x .

Partie B. — On considère les fonctions

$$f : x \mapsto x\sqrt{x} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto -\frac{x+9}{x\sqrt{x}}$$

définies sur $\mathcal{D} =]0; +\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé.

Le but de cette partie est d'étudier les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $\mathcal{D}$.

1. Justifier que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathcal{D}$.
2. On considère la fonction d définie sur $\mathcal{D}$ par $d(x) = f(x) - g(x)$.
 - a. Étudier les limites de d en 0 et en $+\infty$.
 - b. Justifier que d est dérivable sur $\mathcal{D}$ et montrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$d'(x) = \frac{\sqrt{x}h(x)}{2x^3}.$$

- c. En utilisant les résultats de la **Partie A**, déterminer les variations de d sur $\mathcal{D}$.
- d. Dresser le tableau de variation de d sur $\mathcal{D}$.
- e. En quelle(s) valeur(s) du réel $x > 0$ la distance entre les points $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$ est-elle minimale ?

Exercice 2 (facultatif). — On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0; 1]$ par

$$f_n(x) = 1 - x - x^n.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $\alpha_n \in [0; 1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone et qu'elle converge vers un réel ℓ .
4. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.