Corrigé du devoir à la maison n°3 – exercice 78 p. 101

Partie A

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout réel x, $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

2. Pour tout réel x,

$$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$$

par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $g'(x) \leqslant 0$ pour tout réel $x \leqslant 0$ et $g'(x) \geqslant 0$ pour tout réel $x \geqslant 0$. On en déduit que g est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

Pour tout réel $x > 0$, $g(x) = x\left[\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right]$. Or, par théorème, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1 = +\infty$ et ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

On aboutit donc au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de g	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

3. D'après le tableau, le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est 1 donc, pour tout réel x, $g(x) \geqslant 1$ et, à plus forte raison, pour tout réel x, $g(x) > 0$.

Partie B

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x - x \neq 0$ d'après la partie précédente donc, comme toutes les fonctions en jeu sont définies sur $\mathbb{R}$, f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. On a vu dans la partie A que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - x = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc, par quotient, $\lim\limits_{-\infty} f = 0$.

3. Par théorème, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc, par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.
En factorisant par e^x, on a, pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}}.$$

Or, on vient de voir que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc, par somme et quotient, $\lim\limits_{+\infty} f = 1$.

4. Comme $\lim\limits_{-\infty} f = 0$, la droite Δ_1 d'équation $y = 0$ (i.e. l'axe des abscisses) est asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.
De même, comme $\lim\limits_{+\infty} f = 1$, la droite Δ_2 d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - x) - \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)}{(\mathrm{e}^x - x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x\left[(\mathrm{e}^x - x) - (\mathrm{e}^x - 1)\right]}{(\mathrm{e}^x - x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x\left[\mathrm{e}^x - x - \mathrm{e}^x + 1\right]}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$$

donc $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$.

6. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ et $(\mathrm{e}^x - x)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - x$ i.e. $f'(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant 1$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant 1$.

On conclut donc que f est croissante sur $]-\infty\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

On aboutit donc au tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variation de f	0	$\nearrow$	$\dfrac{e}{e-1}$	$\searrow$	1