

Corrigé du devoir à la maison n°3

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur $[0; 5]$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0; 5]$,

$$f'(x) = \frac{4(2x+3) - 2(4x+1)}{(2x+3)^2} = \frac{8x+12-8x-2}{(2x+3)^2} = \frac{10}{(2x+3)^2} \geq 0$$

donc f est croissante sur $[0; 5]$.

2. Soit $x \in [0; 5]$. Comme f est croissante sur $[0; 5]$, $f(0) \leq f(x) \leq f(5)$. Or, $f(0) = \frac{1}{3} \geq 0$ et $f(5) = \frac{21}{13} \leq 5$ donc $0 \leq f(x) \leq 5$.

Partie B

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $0 \leq u_n \leq 5$ ». Comme $u_0 = 4$, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, u_k existe et $0 \leq u_k \leq 5$. Dès lors, d'après **A.2.**, $f(u_k)$ existe et $0 \leq f(u_k) \leq 5$. Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et est positif.

2. Par définition, $u_1 = f(u_0) = f(4) = \frac{4+1}{2 \times 4+3}$ i.e. $u_1 = \frac{17}{11}$.

De même, $u_2 = f(u_1) = f(\frac{17}{11}) = \frac{4 \times \frac{17}{11} + 1}{2 \times \frac{17}{11} + 3} = \frac{68+11}{34+33}$ i.e. $u_2 = \frac{79}{67}$.

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$ ».

Comme $0 \leq \frac{17}{11} \leq 4 \leq 5$, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{Q}(k)$ soit vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors, $0 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 5$ donc, d'après les résultats de la partie A, $0 \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq 5$ i.e. $0 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 5$. Ainsi, $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$.

4. La question précédente assure que (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème des suites monotones, (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$.

5. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$. Or, par produit et somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4u_n + 1 = 4\ell + 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2u_n + 3 = 2\ell + 3$. Comme $\ell \geq 0$, $2\ell + 3 > 0$ donc, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4u_n+1}{2u_n+3} = \frac{4\ell+1}{2\ell+3}$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \frac{4\ell+1}{2\ell+3}$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}) , $\ell = \frac{4\ell+1}{2\ell+3}$ i.e. $\ell(2\ell+3) = 4\ell+1$ soit encore $2\ell^2 - \ell - 1 = 0$.

Le discriminant de la fonction polynôme $P : x \mapsto 2x^2 - x - 1 = 0$ est

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 > 0$$

donc P possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = 1.$$

Or, on vient de voir que ℓ est une racine positive de $P(x)$ donc $\ell = 1$.

Ainsi, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$.

Partie C

1. À l'aide d'une calculatrice, on obtient le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n	0,5	0,75	0,889	0,953	0,981	0,992	0,997	0,999

On peut donc conjecturer que (u_n) converge vers 1.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$1 - v_{n+1} = 1 - \frac{4v_n + 1}{2v_n + 3} = \frac{2v_n + 3 - (4v_n + 1)}{2v_n + 3} = \frac{-2v_n + 2}{2v_n + 3} = \frac{2(1 - v_n)}{2v_n + 3}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 1 - v_{n+1} = \frac{2}{2v_n + 3} (1 - v_n)}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{R}(n)$: « $0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ».

On a $1 - v_0 = 0,5$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ donc $0 \leq 1 - v_0 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$ i.e. $\mathcal{R}(0)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{R}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors, $0 \leq 1 - v_k \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$.

Comme $v_k \geq 0$, $2v_k + 3 \geq 3$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, $0 \leq \frac{1}{2v_k + 3} \leq \frac{1}{3}$ et donc, en multipliant par $2 > 0$, $0 \leq \frac{2}{2v_k + 3} \leq \frac{2}{3}$. En multipliant ensuite par $1 - v_k \geq 0$, on obtient $0 \leq \frac{2}{2v_k + 3}(1 - v_k) \leq \frac{2}{3}(1 - v_k)$. Or, $1 - v_k \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$ donc, en multipliant par $\frac{2}{3} > 0$, $\frac{2}{3}(1 - v_k) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$. Finalement, on aboutit à $0 \leq \frac{2}{2v_k + 3}(1 - v_k) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$ i.e. grâce à la question précédente, $0 \leq 1 - v_{k+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$. Ainsi, $\mathcal{R}(k+1)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

3. Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, on déduit de la question précédente que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - v_n) = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 - (1 - v_n)$ donc, par somme de limite, (v_n) converge et $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1}$.

Partie D (facultatif)

Le calcul des premières valeurs de (w_n) permet de conjecturer que (w_n) est géométrique. Démontrons-le.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$w_{n+1} = \frac{2v_{n+1} - 2}{2v_{n+1} + 1} = \frac{2\frac{4v_n + 1}{2v_n + 3} - 2}{2\frac{4v_n + 1}{2v_n + 3} + 1} = \frac{2(4v_n + 1) - 2(2v_n + 3)}{2(4v_n + 1) + 2v_n + 3} = \frac{4v_n - 4}{10v_n + 5} = \frac{2}{5} \times \frac{2v_n - 2}{2v_n + 1} = \frac{2}{5} w_n.$$

Ainsi, (w_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$. De plus, $w_0 = \frac{2 \times 0,5 - 2}{2 \times 0,5 + 1} = -\frac{1}{2}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $w_n = \frac{2v_n-2}{2v_n+1}$ donc $w_n(2v_n+1) = 2v_n-2$ donc $2w_nv_n + w_n = 2v_n-2$ donc $2w_nv_n - 2v_n = -w_n - 2$ donc $v_n(2w_n-2) = -w_n-2$. Mais, comme $\frac{2}{5} > 0$ et $-\frac{1}{2} < 0$, $w_n < 0$ donc $2w_n < 0$. Ainsi, $2w_n-2 \neq 0$ et donc $v_n = \frac{-w_n-2}{2w_n-2} = \frac{2+w_n}{2-2w_n}$. On conclut donc que

$$v_n = \frac{2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n}{2 - 2\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)} = \frac{2 - \frac{1}{2}\frac{2^n}{5^n}}{2 + \frac{2^n}{5^n}} = \frac{2 - \frac{2^{n-1}}{5^n}}{2 + \frac{2^n}{5^n}}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $\frac{5^n}{2}$, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{5^n - 2^{n-1}}{5^n + 2^{n-1}}}.$$