

CORRECTION DU DEVOIR À LA MAISON N°3

Exercice 1

Partie A. — Un algorithme

1. Par définition, $u_2 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_0 = \frac{4}{3} \times 6 - \frac{1}{3} \times 3$ soit $u_2 = 7$. De même, $u_3 = \frac{4}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_1$ soit $u_3 = \frac{22}{3}$ et $u_4 = \frac{4}{3}u_3 - \frac{1}{3}u_2$ soit $u_4 = \frac{67}{9}$.
2. a. Voici le fonctionnement de l'algorithme proposé pour $N = 4$.

	u	v	affichage
Initialisation	3		3
Initialisation	3	6	6
Étape 1 ($i = 0$)	3	7	3
Étape 2 ($i = 1$)	3	$\frac{25}{3}$	3
Étape 3 ($i = 2$)	3	$\frac{91}{9}$	3

- b. Cet algorithme ne convient pas car la valeur de u reste constante égale à 3 tout au long du fonctionnement.
- c. On voit que pour calculer un terme de la suite, on a besoin des deux précédents. Il est donc nécessaire d'introduire une troisième variable w pour stocker temporairement l'une de ces deux valeurs précédentes. On obtient alors l'algorithme suivant.

```
u ← 3
Afficher u
v ← 6
Afficher v
Pour i allant de 0 à N − 2
    w ← v
    v ←  $\frac{4}{3}v - \frac{1}{3}u$ 
    u ← w
    Afficher v
Fin Pour
```

L'ordre est ici très important. On sauvegarde la valeur de u dans la variable w . Ensuite, on calcule la nouvelle valeur de v (ainsi v a changé de valeur). Enfin, on affecte la valeur de w (qui est l'ancienne valeur de v) à la variable u . Schématiquement, cela revient à dire que si, à l'entrée d'un tour de boucle *Pour*, u contient u_n et v contient u_{n+1} alors

- on stocke u_{n+1} dans w ;
- on calcule $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ et on le stocke dans v
- on stocke u_{n+1} dans u

de telle sorte qu'on affiche bien u_{n+2} (i.e. le contenu de la variable v) et, à la fin du tour de boucle, u a la valeur u_{n+1} et v à la valeur u_{n+2} .

Partie B. — Convergence de (u_n)

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{3}u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = v_n$$

donc (v_n) est une suite constante.

- b. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 = u_1 - \frac{1}{3}u_0 = 5$ i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = 5$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 5}$.
2. a. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n)$: « $u_n \leq u_{n+1} \leq 9$ ».
- Comme $u_0 = 3$ et $u_1 = 6$, $P(0)$ est vraie.
 - On suppose que $P(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
 - Alors, $u_k \leq u_{k+1} \leq 9$ donc, en multipliant par $\frac{1}{3} > 0$, $\frac{1}{3}u_k \leq \frac{1}{3}u_{k+1} \leq 3$ et donc $\frac{1}{3}u_k + 5 \leq \frac{1}{3}u_{k+1} + 5 \leq 8$ i.e. $u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 8$. À plus forte, $u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 9$ donc $P(k+1)$ est vraie.
- Ainsi, on a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq 9}$.
- b. On vient de montrer que (u_n) est croissante et majorée par 9 donc, d'après le théorème de suites monotones, $\boxed{(u_n)$ est convergente}.

Partie C. — Détermination de la limite de (u_n)

On considère la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = u_n - \frac{15}{2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{15}{2} = \frac{1}{3}u_n + 5 - \frac{15}{2} = \frac{1}{3}u_n - \frac{5}{2} = \frac{1}{3} \left(u_n - \frac{15}{2} \right) = \frac{1}{3}w_n$$

donc $\boxed{(w_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ }.

Son premier terme est $w_0 = u_0 - \frac{15}{2}$ soit $\boxed{w_0 = -\frac{9}{2}}$.

2. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - \frac{15}{2}$ donc $u_n = \frac{15}{2} + w_n$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{15}{2} - \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}$.
3. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc, par produit et somme, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{15}{2}}$.

Exercice 2 (facultatif)

1. Posons $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = z^2 + \bar{z}^n = z^n + \bar{z}^n = 2\operatorname{Re}(z^n)$ et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$.
2. *Préliminaire.* Remarquons que $z^4 = \bar{z}^4 = -\frac{1}{4}$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+4} = z^{n+4} + \bar{z}^{n+4} = z^4 z^n + \bar{z}^4 \bar{z}^n = -\frac{1}{4}z^n - \frac{1}{4}\bar{z}^n = -\frac{1}{4}(z^n + \bar{z}^n)$$

i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} = -\frac{1}{4}u_n$.

- a. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{4n}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{4(n+1)} = u_{4n+4} = -\frac{1}{4}u_{4n}$ d'après le préliminaire donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -\frac{1}{4}v_n$. Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times (-\frac{1}{4})^n = 2 \times (-\frac{1}{4})^n$. Dès lors, si n est pair, $v_n > 0$ et, si n est impair, $v_n < 0$ i.e. $u_{4n} > 0$ si n est pair et $u_{4n} < 0$ si n est impair. On en déduit que (u_n) n'est pas monotone à partir d'un certain rang car alors elle serait de signe constant à partir d'un certain rang. L'affirmation 1 est FAUSSE.

- b. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{4n+2}$. On montre comme précédemment que (w_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times (-\frac{1}{4})^n$. Or, $w_0 = u_2 = 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 0$ i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+2} = 0$.

Ainsi, l'affirmation 2 est VRAIE.

- c. On va montrer que (u_n) tend vers 0. Pour cela, on revient à la définition. Soit $r > 0$. On va montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $-r < u_n < r$.

Introduisons, en plus des suites (v_n) et (w_n) déjà définies, les suites (x_n) et (y_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $x_n = u_{4n+1}$ et $y_n = u_{4n+3}$. Comme on l'a fait pour (v_n) , on montre, à l'aide du préliminaire, que les suites (x_n) et (y_n) sont également géométriques de raison $-\frac{1}{4}$. Comme $-1 < -\frac{1}{4} < 1$, les quatre suites (v_n) , (w_n) , (x_n) et (y_n) tendent toutes vers 0. Ainsi, il existe des rangs N_1 , N_2 , N_3 et N_4 tels que, pour tout $n \geq N_1$, $-r < v_n < r$, pour tout $n \geq N_2$, $-r < w_n < r$, pour tout $n \geq N_3$, $-r < x_n < r$ et pour tout $n \geq N_4$, $-r < y_n < r$. Notons M le plus grand des 4 nombres N_1 , N_2 , N_3 et N_4 . Alors, pour tout $n \geq M$, les quatre nombres v_n , w_n , x_n et y_n sont strictement compris entre $-r$ et r . Posons, pour finir, $N = 4M$. Soit $n \geq N$. Alors, n s'écrit sous la forme $n = 4q + r$ avec $q \geq M$ et r un entier compris entre 0 et 3. Si $r = 0$ alors $n = 4q$ donc $u_n = v_q$ et, comme $q \geq M$, $-r < v_q < r$ i.e. $-r < u_n < r$. Le même raisonnement avec les suites (w_n) , (x_n) et (y_n) montre que $-r < u_n < r$ si $n = 4q + 1$ ou $n = 4q + 2$ ou $n = 4q + 3$. Ainsi, dans tous les cas, $-r < u_n < r$ ce qui prouve, par définition, que (u_n) converge vers 0.

Ainsi, l'affirmation 3 est VRAIE.