

DEVOIR À LA MAISON N°3

À rendre le lundi 05 novembre 2018

Exercice 1. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement asymptotique de (u_n) .

Partie A. — Un algorithme

1. Calculer, à la main, u_2 , u_3 et u_4 .
2. Étant donné un entier naturel $N \geq 1$, on souhaite écrire un algorithme qui affiche les valeurs des $N + 1$ premiers termes de la suite (u_n) (i.e. $u_0, u_1, \dots, u_N$).
On considère l'algorithme suivant.

```

u ← 3
Afficher u
v ← 6
Afficher v
Pour i allant de 0 à N − 2
    v ←  $\frac{4}{3}v - \frac{1}{3}u$ 
    Afficher u
Fin Pour
    
```

- a. Faire fonctionner l'algorithme ci-dessus pour $N = 4$. On présentera les différentes étapes de l'algorithme sous la forme d'un tableau indiquant les valeurs des différentes variables ainsi que l'affichage.
- b. Expliquer pourquoi l'algorithme ci-dessus ne convient pas.
- c. Modifier cet algorithme afin qu'il affiche les valeurs des $N + 1$ premiers termes de la suite (u_n) .

Partie B. — Convergence de (u_n)

On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n.$$

1.
 - a. Démontrer que (v_n) est une suite constante.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 5$.
2.
 - a. En utilisant le résultat de la question 1. b., montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} \leq 9$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Partie C. — Détermination de la limite de (u_n)

On considère la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = u_n - \frac{15}{2}$.

1. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2 (facultatif). — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$.
2. Les affirmations suivantes sont-elles vraie ou fausses ?
 - a. AFFIRMATION 1 : la suite (u_n) est monotone à partir d'un certain rang.
 - b. AFFIRMATION 2 : il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $u_n = 0$.
 - c. AFFIRMATION 3 : la suite (u_n) converge.