

CORRECTION DU DEVOIR À LA MAISON N°3

Exercice 1

Partie A

1. a.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	2	2,449	2,711	2,852	2,925	2,962	2,981	2,991	2,995	2,998	2,999

b. On peut conjecturer que (u_n) est croissante et tend vers 3.

2. a. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $2 \leq u_n \leq 3$ ».

Comme $u_0 = 2$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $2 \leq u_k \leq 3$ donc $6 \leq 3u_k \leq 9$ et, comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{6} \leq \sqrt{3u_k} \leq \sqrt{9}$. Or, $\sqrt{6} \approx 2,5 \geq 2$, $\sqrt{3u_k} = u_{k+1}$ et $\sqrt{9} = 3$ donc $2 \leq u_{k+1} \leq 3$ i.e. $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, comme $u_n \geq 0$,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n} - \sqrt{u_n^2} = \sqrt{u_n}(\sqrt{3} - \sqrt{u_n}).$$

Or, $0 \leq u_n \leq 3$ donc, par croissance de la racine carrée sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{u_n} \leq \sqrt{3}$ donc $\sqrt{3} - \sqrt{u_n} \geq 0$. Par suite, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 3 donc, d'après le théorème des suites monotones, (u_n) converge vers un réel ℓ .

d. Par définition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$. Par produit, il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^2 = \ell^2$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = 3u_n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^2 = 3\ell$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}) , on en déduit que $\ell^2 = 3\ell$. Dès lors, $\ell^2 - 3\ell = 0$ donc $\ell(\ell - 3) = 0$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = 3$. Or, (u_n) est minorée par 2 donc $\ell \geq 2$. Par suite, $\ell = 3$.

Partie B

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, en multipliant par l'expression conjuguée,

$$3 - u_{n+1} = 3 - \sqrt{3u_n} = \frac{(3 - \sqrt{3u_n})(3 + \sqrt{3u_n})}{3 + \sqrt{3u_n}} = \frac{9 - 3u_n}{3 + \sqrt{3u_n}}$$

et donc

$$\boxed{3 - u_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{3u_n} + 3}(3 - u_n)}.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu dans la partie A que $u_n \geq 2$ donc $3u_n \geq 6$. Par croissance de la racine carrée sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{3u_n} \geq \sqrt{6}$ et ainsi $\sqrt{3u_n} + 3 \geq \sqrt{6} + 3$. En prenant l'inverse et en multipliant par 3, on en déduit que

$$\frac{3}{\sqrt{3u_n} + 3} \leq q.$$

De plus, $u_n \leq 3$ donc $3 - u_n \geq 0$ donc, en multipliant l'inégalité précédente par $3 - u_n$, on obtient, grâce à la question a,

$$\boxed{3 - u_{n+1} \leq q(3 - u_n)}.$$

c. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $3 - u_n \leq q^n$ ».

Par définition, $3 - u_0 = 3 - 2 = 1$ et $q^0 = 1$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{Q}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $3 - u_k \leq q^k$ donc, comme $q \geq 0$, $q(3 - u_k) \leq q^{k+1}$. Par ailleurs, grâce à la question b, $3 - u_{k+1} \leq q(3 - u_k)$ donc $3 - u_{k+1} \leq q^{k+1}$. Ainsi, $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie.

On conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 3 - u_n \leq q^n}$.

d. Comme (u_n) est majorée par 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 3 - u_n \leq q^n$. De plus, $q \approx 0,55$ donc $-1 < q < 1$ et ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - u_n) = 0$. Puisque $u_n = 3 - (3 - u_n)$, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ i.e. $\boxed{\ell = 3}$.

2. a. L'algorithme calcule les valeurs de la suite (u_n) dans la variable U et la boucle Tant que s'arrête lorsque $3 - U \leq E$ donc l'algorithme affiche en sortie le plus petit indice n tel que $3 - u_n \leq E$ i.e. le plus petit indice tel que u_n approche 3 avec une précision inférieure ou égale à E .
- b. D'après le tableau de la question 1.a, le premier terme de (u_n) tel que $3 - u_n \leq 10^{-2}$ est $u_7 \approx 2,991$ donc l'algorithme affiche $N = 7$ en sortie.
- c. D'après la question 1.c, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 - u_n \leq q^n$ donc $3 - u_{24} \leq q^{24} \approx 6.10^{-7}$ donc $3 - u_{24} \leq 10^{-6}$ ce qui assure que le premier indice tel que $3 - u_n \leq 10^{-6}$ est au plus 24. Dès lors, l'algorithme affiche en sortie un entier $N \leq 24$.

Exercice 2 (facultatif)

1. a. Notons ℓ la limite de (S_n) . Alors, (S_{n-1}) converge aussi vers ℓ . Soit $n \geq 2$. Alors, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Or, (S_n) et (S_{n-1}) tendent vers ℓ donc, par différence, (u_n) tend vers $\ell - \ell = 0$. Ainsi, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.
- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ par hypothèse donc (S_n) est croissante. Le théorème des suites monotones assure alors que (S_n) converge si et seulement si elle est majorée.
Considérons la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n$. Alors, $S_0 = (-1)^0 = 1$, $S_1 = (-1)^0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$, $S_2 = S_1 + (-1)^2 = 1$, $S_3 = S_2 + (-1)^3 = 0$ et, de manière générale, $S_n = 1$ si n est pair et $S_n = 0$ si n est impair. Ainsi, S_n est majorée mais ne converge pas. L'équivalence est donc fautive si (u_n) est de signe quelconque.
2. a. Soit un entier $k \geq 2$. Alors, $k^2 \geq k(k-1) > 0$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

Or,

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$$

donc

$$\boxed{\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}}.$$

b. Soit $n \geq 2$. Alors,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

Or,

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

donc

$$S_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

Ainsi, la suite (S_n) est majorée donc, comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, (S_n) converge d'après la question 1.b.

3. Soit un entier $k \geq 2$. Alors, $k^p \geq k^2$ donc $\frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ et, en raisonnant comme précédemment, (S_n) est majorée par 2 donc convergente.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, la somme

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

contient $2n - (n+1) + 1 = n$ termes qui sont tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2n}$ donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

b. Supposons que (S_n) converge vers un réel ℓ . Alors, (S_{2n}) converge aussi vers ℓ . Or,

$$S_{2n} = S_n + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq S_n + \frac{1}{2}.$$

En passant à la limite, on en déduit que $\ell \geq \ell + \frac{1}{2}$ ce qui est absurde donc $\boxed{(S_n) \text{ diverge}}.$

c. On en déduit que la réciproque du résultat de la question 1.a. est fausse car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ mais la suite (S_n) diverge.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{k} \leq k$ donc $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Or, d'après la question précédente, la suite $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ diverge donc, comme elle est croissante, elle tend vers $+\infty$. Dès lors, grâce au théorème de comparaison, $\boxed{(S_n) \text{ diverge vers } +\infty}.$