

DEVOIR À LA MAISON N°3

À rendre le lundi 06 novembre 2017

Exercice 1. — Dans tout cet exercice, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$.

Partie A

1. **a.** Calculer les valeurs arrondies au millièmè près des termes u_0 à u_{10} . On présentera les résultats sous forme d'un tableau. On ne demande pas de faire apparaître le détail des calculs sur la copie.
- b.** Quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variation et le comportement asymptotique de (u_n) ?
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$.
- b.** Étudier le sens de variation de (u_n) .
- c.** En déduire que (u_n) converge vers une limite ℓ .
- d.** En remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = 3u_n$, déterminer la valeur de ℓ .

Partie B. — Dans cette partie, on se propose de retrouver d'une autre manière la valeur de ℓ et d'étudier la vitesse de convergence de (u_n) . On pourra utiliser les résultats de la partie A à l'exception de la valeur de ℓ déterminée en question 2.d.

1. **a.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$3 - u_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{3u_n} + 3}(3 - u_n)$$

- b.** On pose $q = \frac{3}{\sqrt{6}+3}$. Déduire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$3 - u_{n+1} \leq q(3 - u_n).$$

- c.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$3 - u_n \leq q^n.$$

- d.** Retrouver la valeur de ℓ .

2. On considère l'algorithme suivant

Entrée	: E est un réel strictement positif
Initialisation	: Donner à U la valeur 2 Donner à N la valeur 0
Traitement	: Tant que $3 - U > E$ Donner à U la valeur $\sqrt{3U}$ Donner à N la valeur $N + 1$ Fin Tant que
Sortie	: Afficher N

- a. Expliquer ce qu'affiche en sortie cet algorithme pour un réel $E > 0$ donné en entrée.
- b. On fait fonctionner cet algorithme en entrant $E = 10^{-2}$. En s'appuyant sur le tableau de la question 1.a. de la partie A, déterminer, en justifiant, la valeur affichée en sortie.
- c. On fait fonctionner cet algorithme en entrant $E = 10^{-6}$. En utilisant le résultat de la question 1.c. de la partie B, justifier que la valeur affichée en sortie sera inférieure ou égale à 24.

Exercice 2 (facultatif). — Si $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite réelle, on note (S_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

Le but de l'exercice est d'étudier la comportement asymptotique de la suite (S_n) pour différents exemples de suites (u_n) .

1. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle.
 - a. On suppose que (S_n) converge. Démontrer que (u_n) tend vers 0.
 - b. On suppose que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq 0$. Démontrer que (S_n) converge si et seulement si elle est majorée.
Montrer que cette équivalence est fausse si on ne suppose plus que les termes de la suite (u_n) sont positifs.
2. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) est définie par : pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{n^2}.$$

- a. Justifier que, pour tout entier $k \geq 2$,

$$u_k \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

- b. En déduire que (S_n) converge.
3. Soit p un entier supérieur ou égal à 3. On suppose que la suite (u_n) est définie par : pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{n^p}.$$

La suite (S_n) est-elle convergente ?

4. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) est définie par : pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{n}.$$

- a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}.$$

- b. En raisonnant par l'absurde, déduire de la question précédente que (S_n) diverge.
- c. Que peut-on en déduire relativement au résultat de la question 1.a. ?
5. On suppose que la suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La suite (S_n) est-elle convergente ?