

# CORRECTION DU DEVOIR À LA MAISON N°3

## Exercice 1

1. On a  $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1$  soit  $\boxed{u_1 = \frac{3}{2}}$ ,  $v_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}v_0 + 2$  soit  $\boxed{v_1 = 3}$ ,  $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1$  soit  $\boxed{u_2 = \frac{7}{4}}$  et  $v_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}v_1 + 2$  et  $\boxed{v_2 = \frac{17}{4}}$ .
2. Voici un algorithme qui affiche en sortie les valeurs de  $u_n$  et  $v_n$  pour un entier  $n$  donnée en entrée.

|                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                    |  |                                   |  |                                                  |  |                    |  |
|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|--|-----------------------------------|--|--------------------------------------------------|--|--------------------|--|
| <b>Variables :</b>                               | $n$ est un entier<br>$U, V$ sont des réels<br>$K$ est un entier                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                    |  |                                   |  |                                                  |  |                    |  |
| <b>Entrée :</b>                                  | Saisir $N$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                    |  |                                   |  |                                                  |  |                    |  |
| <b>Traitement :</b>                              | Affecter 1 à $U$<br>Affecter 1 à $V$<br>Pour $K$ allant de 1 à $n$ <table style="margin-left: 20px; border-left: 1px solid black; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">Affecter <math>U</math> à <math>W</math></td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">Affecter <math>\frac{1}{2}W + 1</math> à <math>U</math></td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">Affecter <math>\frac{1}{2}W + \frac{1}{2}V + 2</math> à <math>V</math></td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">Affecter <math>W</math> à <math>U</math></td><td></td></tr> </table> Fin Pour | Affecter $U$ à $W$ |  | Affecter $\frac{1}{2}W + 1$ à $U$ |  | Affecter $\frac{1}{2}W + \frac{1}{2}V + 2$ à $V$ |  | Affecter $W$ à $U$ |  |
| Affecter $U$ à $W$                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                    |  |                                   |  |                                                  |  |                    |  |
| Affecter $\frac{1}{2}W + 1$ à $U$                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                    |  |                                   |  |                                                  |  |                    |  |
| Affecter $\frac{1}{2}W + \frac{1}{2}V + 2$ à $V$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                    |  |                                   |  |                                                  |  |                    |  |
| Affecter $W$ à $U$                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                    |  |                                   |  |                                                  |  |                    |  |
| <b>Sortie :</b>                                  | Afficher $U$<br>Afficher $V$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                    |  |                                   |  |                                                  |  |                    |  |

On pouvait également donner l'algorithme suivant qui a l'avantage de ne pas introduire de variable auxiliaire  $W$ . Notons cependant qu'il convient uniquement parce que le calcul de  $u_n$  n'utilise pas la valeur de  $v_n$ .

|                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                  |  |                                   |  |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--|-----------------------------------|--|
| <b>Variables :</b>                               | $n$ est un entier<br>$U, V$ sont des réels<br>$K$ est un entier                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                  |  |                                   |  |
| <b>Entrée :</b>                                  | Saisir $N$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                  |  |                                   |  |
| <b>Traitement :</b>                              | Affecter 1 à $U$<br>Affecter 1 à $V$<br>Pour $K$ allant de 1 à $n$ <table style="margin-left: 20px; border-left: 1px solid black; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">Affecter <math>\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V + 2</math> à <math>V</math></td><td></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">Affecter <math>\frac{1}{2}U + 1</math> à <math>U</math></td><td></td></tr> </table> Fin Pour | Affecter $\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V + 2$ à $V$ |  | Affecter $\frac{1}{2}U + 1$ à $U$ |  |
| Affecter $\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V + 2$ à $V$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                  |  |                                   |  |
| Affecter $\frac{1}{2}U + 1$ à $U$                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                  |  |                                   |  |
| <b>Sortie :</b>                                  | Afficher $U$<br>Afficher $V$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                  |  |                                   |  |

3. a. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}w_n$$

donc la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

**b.** Comme  $w_0 = u_0 - 2 = -1$ , on en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2^n}$

et donc, comme  $u_n = 2 + w_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ .

**c.** Comme  $2 > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$  et ainsi, par différence,  $(u_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ .

**4. a.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \left(2 - \frac{1}{2^k}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{2^0} + 2 - \frac{1}{2^1} + \cdots + 2 - \frac{1}{2^n} \\ &= \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n+1 \text{ fois}} - \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 2(n+1) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

Or,  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$  est la somme des  $n+1$  premiers termes de la suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme 1 donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 2 \left[1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right].$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n = 2(n+1) - 2 \left[1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right] = 2n + 2 - 2 + 2 \times \frac{1}{2^{n+1}}$$

c'est-à-dire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = 2n + \frac{1}{2^n}$ .

**b.** On a déjà vu que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ . Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$  donc, par somme,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ .

**5. a.** Considérons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la proposition  $P_n : \ll v_n = 6 - \frac{n+5}{2^n} \gg$ .

Comme  $6 - \frac{0+5}{2^0} = 6 - \frac{5}{1} = 1$  et  $v_0 = 1$ ,  $P_0$  est vraie.

Supposons que  $P_k$  est vraie pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ .

Alors,

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \frac{1}{2}u_k + \frac{1}{2}v_k + 2 = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2}\left(6 - \frac{k+5}{2^k}\right) + 2 \\ &= 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + 3 - \frac{k+5}{2^{k+1}} + 2 \\ &= 6 - \frac{(k+1)+5}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

donc  $P_{k+1}$  est vraie.

On a donc démontré par récurrence que,  $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = 6 - \frac{n+5}{2^n}}.$

**b.** Fait en cours (exemple 3 du chapitre 0).

**c.** Soit un entier  $n \geq 4$ . Alors,  $0 < n^2 \leq 2^n$  donc, par décroissance de la fonction inverse sur  $]0; +\infty[$ ,  $\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{2^n} > 0$ . Comme  $n+5 \geq 0$ , il s'ensuit que  $0 \leq \frac{n+5}{2^n} \leq \frac{n+5}{n^2}$ .

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+5}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  donc, d'après le théorème d'encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+5}{2^n} = 0$ . Par différence, on en déduit que  $(v_n)$  converge et que  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 6}$ .

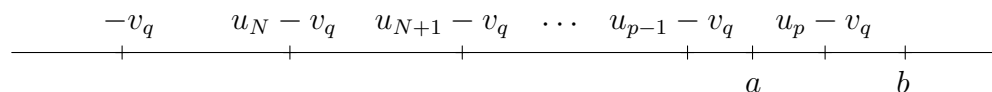
## Exercice 2 (facultatif)

**1.** Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ , il existe un rang  $N$  tel que, pour tout entier  $n \geq N$ ,  $u_{n+1} - u_n < b - a$  (car  $b - a > 0$ ).

Par ailleurs, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -v_n = -\infty$  donc, il existe un rang  $q$  tel que  $-v_q < a - u_N$ . Remarquons que  $u_N - v_q < a$  donc, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , il existe un rang  $p > N$  tel que  $u_{p-1} - v_q < a$  et  $u_p - v_q > a$ . De plus, comme  $p > N$ ,  $u_p - u_{p-1} < b - a$  donc

$$u_p - v_q = (u_{p-1} - v_q) + (u_p - u_{p-1}) < a + (b - a) = b.$$

Ainsi,  $\boxed{\text{il existe deux entiers } p \text{ et } q \text{ tels que } a < u_p - v_q < b}$ .



(Remarque. — Le schéma suppose que  $u_N > 0$  ce qui n'est pas nécessairement le cas mais, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , les termes de  $(u_n)$  sont positifs à partir d'un certain rang donc on peut toujours supposer que  $u_N > 0$ .)

**2.** Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $u_n = \sqrt{n}$  et  $v_n = n$  vérifient (\*) et (\*\*).