

DEVOIR À LA MAISON N°3

À rendre jusqu'au mercredi 19 octobre 2016

Exercice 1. — On considère deux suites de nombres réels (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n + 2 \end{cases}.$$

1. Calculer u_1 et v_1 puis u_2 et v_2 .
2. Écrire un algorithme qui affiche en sortie les valeurs de u_n et v_n pour une valeur de l'entier n donnée en entrée.
3. **a.** On considère la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = u_n - 2$.
Montrer que la suite (w_n) est géométrique.
b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n .
c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
a. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de S_n en fonction de n .
b. Étudier le comportement asymptotique de (S_n) .
5. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 6 - \frac{n+5}{2^n}$.
b. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.
c. Dédurre des questions précédentes le comportement asymptotique de la suite (v_n) .

Exercice 2 (facultatif). — On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \quad \text{et} \quad (**) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0.$$

1. Démontrer que, pour tous réels a et b tels que $a < b$, il existe deux entiers naturels p et q tels que

$$a < u_p - v_q < b.$$

2. Donner un exemple simple de deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $(*)$ et $(**)$.