

CORRECTION DU DEVOIR À LA MAISON N°3

Exercice 1

1. a. Les premières valeurs de la suite permettent seulement de faire une conjecture mais sûrement pas d'affirmer que la suite est décroissante.
- b. Voici les 11 premières valeurs de (u_n) arrondies au centième.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	16	7	3,5	2,75	3,38	4,69	6,34	8,17	10,09	12,04	14,02

- c. On peut conjecturer que (u_n) est croissante à partir du rang 3.
- d. Soit la proposition $P_n : \ll u_n \leq u_{n+1} \gg$ pour $n \in \mathbb{N}$.
D'après le tableau précédent, la proposition P_3 est vraie.
Supposons que P_k soit vraie pour un certain entier $k \geq 3$.
Alors, $u_k \leq u_{k+1}$ donc, comme $\frac{1}{2} > 0$, $\frac{1}{2}u_k \leq \frac{1}{2}u_{k+1}$ et donc $\frac{1}{2}u_k + k - 1 \leq \frac{1}{2}u_{k+1} + k - 1$.
Or, $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + k - 1$ et $u_{k+2} = \frac{1}{2}u_{k+1} + (k+1) - 1 = \frac{1}{2}u_{k+1} + k$ donc $u_{k+1} \leq u_{k+2} - 1$ et *a fortiori* $u_{k+1} \leq u_{k+2}$. Ainsi, P_{k+1} est vraie et on a montré par récurrence que (u_n) est croissante à partir du rang 3.
2. a. Supposons que (u_n) converge vers une limite ℓ . Alors, $\lim u_{n+1} = \ell$ donc, par opération sur les limites, $\lim \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \right) = \ell - \frac{1}{2}\ell = \frac{1}{2}\ell$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = n - 1$ donc $\lim \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \right) = +\infty$. On aboutit à une absurdité puisque que la suite $\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \right)$ ne peut à la fois converger vers $\frac{1}{2}\ell$ et diverger vers $+\infty$.
On conclut que (u_n) diverge.
- b. Comme (u_n) est croissante à partir d'un certain rang, d'après le théorème des suites monotones, ou bien (u_n) converge ou bien (u_n) diverge vers $+\infty$. Or, on vient de montré que (u_n) diverge donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 6 = \frac{1}{2}u_n + n - 1 - 2n + 4 = \frac{1}{2}u_n - n + 3 = \frac{1}{2}(u_n - 2n + 6) = \frac{1}{2}v_n$$

donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

- b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \left(\frac{1}{2} \right)^n$. Or, $v_0 = u_0 - 2 \times 0 + 6 = 16 + 6 = 22$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 22 \left(\frac{1}{2} \right)^n$. Étant donné que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 2n - 6$, il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 22 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2n - 6$.

c. Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[22 \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] = 0$. Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - 6) = +\infty$ donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. a. On a vu que (u_n) est croissante à partir du rang 3 donc, pour tout entier $n \geq 3$, $u_3 \leq u_n$. De plus, d'après le tableau de l'énoncé, pour tout $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, $u_3 \leq u_n$. On peut donc affirmer que (u_n) est minorée par $u_3 = 2,75$. Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \geq \underbrace{2,75 + 2,75 + \dots + 2,75}_{n+1 \text{ fois}}$ i.e. $S_n \geq 2,75(n+1)$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2,75(n+1) = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

b. Voici un algorithme répondant à la question.

Entrée :	A un réel			
Initialisation :	Donner à U la valeur 16 Donner à S la valeur 16 Donner à N la valeur 0			
Traitement :	Tant que $S < A$ <table border="0" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Donner à U la valeur $\frac{1}{2}U + N - 1$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Donner à S la valeur $S + U$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Donner à N la valeur $N + 1$</td> </tr> </table>	Donner à U la valeur $\frac{1}{2}U + N - 1$	Donner à S la valeur $S + U$	Donner à N la valeur $N + 1$
Donner à U la valeur $\frac{1}{2}U + N - 1$				
Donner à S la valeur $S + U$				
Donner à N la valeur $N + 1$				
	Fin Tant que			
Sortie :	Afficher N			

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left[22 \left(\frac{1}{2} \right)^k + 2k - 6 \right] = \sum_{k=0}^n \left[22 \left(\frac{1}{2} \right)^k \right] + \sum_{k=0}^n [2k - 6].$$

On reconnaît dans la première somme la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 22 et dans la deuxième somme la somme des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 6. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} S_n &= 22 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + (n+1) \frac{-6 + (2n-6)}{2} \\ &= 22 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} + (n+1) \frac{2n-12}{2} \\ &= 2 \times 22 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] + (n+1)(n-6) \end{aligned}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = 44 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] + (n+1)(n-6).$$

Exercice 2

1. Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ si n est pair et $u_n = 0$ si n est impair.

Il est clair que (u_n) n'est pas monotone à partir d'un certain rang car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} > 0$ donc $u_{2n} > u_{2n+1}$ et $u_{2n+2} > 0$ donc $u_{2n+1} < u_{2n+2}$.

Montrons que (u_n) vérifie la propriété T.

D'une part, $u_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par définition, $u_n \geq 0$.

D'autre part, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est pair alors $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $2u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et ainsi

les $\frac{n}{2}$ nombres $u_0 = 1, u_2 = \frac{1}{2}, \dots, u_{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ sont supérieurs à $2u_n$.

Si n est impair alors $u_n = 0$ donc $2u_n = 0$ et tous les nombres $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ sont supérieurs ou égaux à $2u_n$.

Dans tous les cas, au moins la moitié des nombres $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ sont supérieurs à $2u_n$. Ainsi, (u_n) vérifie bien la propriété T.

2. Examinons les premiers termes de la suite (u_n) . Comme il y a un seul terme d'indice inférieur à u_1 , on a nécessairement $2u_1 \leq u_0$ i.e. $u_1 \leq \frac{1}{2}$. Parmi u_0 et u_1 , au moins 1 terme est supérieur à $2u_2$ donc $2u_2 \leq 1$ i.e. $u_2 \leq \frac{1}{2}$. Parmi u_0, u_1 et u_2 , au moins 2 termes sont supérieurs à $2u_3$ donc $u_3 \leq \frac{1}{4}$. En continuant ainsi, on montre que u_4, u_5 et u_6 sont inférieurs à $\frac{1}{4}$ puis que u_7 est inférieur à $\frac{1}{8}$. Il est alors naturel de rassembler les termes par paquets de puissances de 2 qui ont tous un majorant commun. Plus précisément, si r_n est l'entier tel que $2^{r_n} - 1 \leq n < 2^{r_{n+1}} - 1$, on peut conjecturer que $u_n \leq \frac{1}{2^{r_n}}$.

Montrons cette conjecture par récurrence.

Pour $n = 0$, $r_0 = 0$ et $u_0 = 1 \leq \frac{1}{2^0}$.

Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_k \leq \frac{1}{2^{r_k}}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Alors, il y a deux possibilités pour $n + 1$. Ou bien $n + 1 < 2^{r_{n+1}} - 1$ i.e. $r_{n+1} = r_n$. Alors, on a $2^{r_n-1} - 1 < 2^{r_n} - 1 \leq n < n + 1$. Or, entre les indices $2^{r_n-1} - 1$ (compris) et $2^{r_n} - 1$ (exclu), il y a $2^{r_n} - 1 - (2^{r_n-1} - 1) = 2^{r_n-1}$ termes qui, par hypothèse de récurrence, sont tous inférieurs à $\frac{1}{2^{r_n-1}}$ et, entre les indices 0 (compris) et $2^{r_n-1} - 1$ (exclu), il n'y a que $2^{r_n-1} - 1$ termes. Ainsi, comme $2u_{n+1}$ doit être inférieur à plus de la moitié de termes $u_0, u_1, \dots, u_n$, on en déduit que $2u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{r_n-1}}$ i.e. $u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{r_n}} = \frac{1}{2^{r_{n+1}}}$.

Si, au contraire, $n + 1 = 2^{r_{n+1}} - 1$ i.e. $r_{n+1} = r_n + 1$ alors, il y a, entre les termes d'indices $2^{r_n} - 1$ (compris) et $2^{r_{n+1}} - 1$ (exclu) exactement $2^{r_{n+1}} - 1 - (2^{r_n} - 1) = 2^{r_n}$ termes inférieurs à $\frac{1}{2^{r_n}}$ ce qui représente plus que la moitié des termes entre 0 (compris)

et $2^{r_{n+1}} - 1$ (exclu) donc $2u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{r_n}}$ i.e. $u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{r_{n+1}}} = \frac{1}{2^{r_{n+1}}}$ et ainsi l'hérédité est vérifiée.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{r_n}} = 0$ et donc, comme (u_n) est à termes positifs, on conclut, par encadrement, que $\lim u_n = 0$.