

DEVOIR À LA MAISON N°3

A rendre le mercredi 4 novembre 2015

Exercice 1. — On note (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 16$ et, pour tout entier naturel n , par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1.$$

1. a. À l'aide d'une calculatrice, on a déterminé les premières valeurs de la suite (u_n) qui sont rassemblées dans le tableau suivant.

n	0	1	2	3
u_n	16	7	3,5	2,75

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ?

- b. Calculer (à la main ou à l'aide d'une calculatrice) les termes suivants de la suite jusqu'au rang $n = 10$. Rassembler les résultats, arrondis au centième, dans un tableau. (On ne demande pas de faire apparaître le détail des calculs sur la copie.)
- c. Quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variation de (u_n) ?
- d. Démontrer cette conjecture.
2. a. En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que (u_n) diverge.
- b. En déduire le comportement asymptotique de (u_n) .
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 2n + 6$.
- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
- b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n .
- c. Retrouver le résultat de la question 2.b.
4. On considère la suite (S_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
- a. Sans déterminer de formule explicite, étudier le comportement asymptotique de (S_n) .
- b. Écrire un algorithme qui prend en entrée un réel A et qui affiche en sortie le plus petit entier n tel que $S_n \geq A$.
- c. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de S_n en fonction de n .

Exercice 2 (facultatif). — On dit qu'une suite (u_n) possède la propriété T si

- $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$;
 - pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, au moins la moitié des nombres $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ sont supérieurs ou égaux à $2u_n$.
1. Donner un exemple de suite possédant la propriété T et qui ne soit pas décroissante à partir d'un certain rang.
2. On suppose que (u_n) est une suite possédant la propriété T. Étudier le comportement asymptotique de (u_n) .